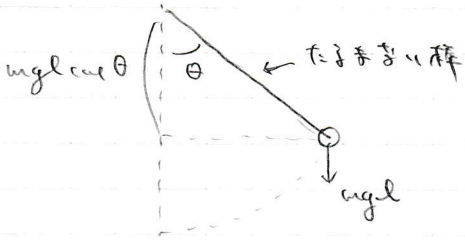
第3章 運動方程式の積分

§11. 一次元運動

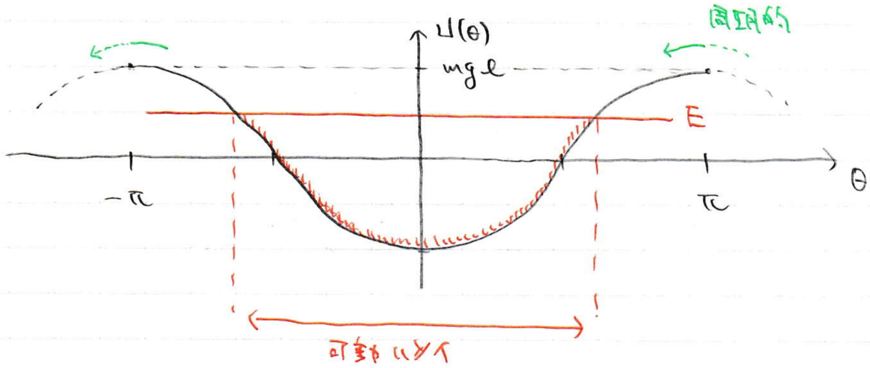
単振子

エネルギー保存則は

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta \quad \cdots ①$$



となる. もちろん右辺第2項はポテンシャルである. これを図示すると下図のようになる.



E > mgl のときは質点mは無限に回りつづけることになる.
E < mgl のときは周期運動をする. 上の図だけでは時間的変化がわからないので, 振り子の周期Tを求めることにしよう.

まず, ①より

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 = E + mgl\cos\theta = mgl(\cos\theta - \cos\theta_{max})$$

$$\therefore \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta_{max} + \cos\theta)$$

$$\frac{dt}{d\theta} = \sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_{max}}}$$

である. 以上より

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_{max}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_{max}}} \qquad (T: 周期)$$

である. これを積分することが目的となる.

まず,

$$\cos\theta - \cos\theta_{max} = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} - \left(1 - 2\sin^2\frac{\theta_{max}}{2}\right)$$

$$= 2\left(\sin^2\frac{\theta_{max}}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

であることより

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_{max}}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}} \quad \cdots ②$$

とかける. さらに

$$\sin t = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta_{max}}{2}}$$

θ	$0 \to \theta_{max}$
t	$0 \to \frac{\pi}{2}$

と置換して

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cancel{\sin\frac{\theta_{max}}{2}}}\frac{1}{\cancel{\sqrt{1-\sin^2 t}}}\frac{2\cancel{\sin\frac{\theta_{max}}{2}}\cancel{\cos t}}{\cos\frac{\theta}{2}}\,dt$$

$$= 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta_{max}}{2}\sin^2 t}}$$

となる. これは第一種完全楕円積分 $K(k)$

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} = \frac{\pi}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 k^4 + \cdots\right) \quad \cdots ③$$

の形をしているので, 以上より③を用いて

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta_{max}}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\theta_{max}}{2} + \cdots\right)$$

$$= \underline{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta_{max}}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\theta_{max}}{2} + \cdots\right)}$$

とかける.

とくに θ_{max} が微小のとき, T は

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

となる. これはよく知られている初等的な公式である.

$U(x) = A|x|^n$ のとき

エネルギー保存は

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + A|x|^n \quad \cdots ①$$

である. これより

$$x_{max} = \left(\frac{E}{A}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \cdots ②$$

である. また, ①より

$$T = 4\sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{E - A|x|^n}} = 4\sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{E - Ax^n}}$$

となる. 積分区間を $0 \to 1$ にしたいので

$$t = \left(\frac{E}{A}\right)^{-\frac{1}{n}} x \qquad \begin{array}{c|c} x & 0 \to x_{max} \\ \hline t & 0 \to t \end{array} \qquad dt = \left(\frac{E}{A}\right)^{-\frac{1}{n}} dx$$

とおくと $Et^n = Ax^n$ となり, と

$$T = 4\sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{1}{\sqrt{1-t^n}} \left(\frac{E}{A}\right)^{\frac{1}{n}} dt$$

$$= 2\sqrt{2m}\, E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{n}} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^n}} \quad \cdots ③$$

となる. ここで $t^n = u$ とおいてみると

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^n}} = \int_0^1 \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} (1-u)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{n} B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right)$$

とかける. ここで $B(p, q)$ はベータ関数である. さらに

$$B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{1}{n}+\frac{1}{2})} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{1}{n}+\frac{1}{2})}$$

となる. 以上より

$$T = 2\sqrt{2m}\, E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{n}} \sqrt{\pi} \frac{1}{n} \frac{\Gamma(\frac{1}{n})}{\Gamma(\frac{1}{n}+\frac{1}{2})}$$

$$= \underline{\frac{2\sqrt{2\pi m}\, \Gamma(\frac{1}{n})}{n A^{\frac{1}{n}} \Gamma(\frac{1}{n}+\frac{1}{2})} E^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}}$$

である.

とくに, $n=1$ (線形ポテンシャル) の場合をしらべてみよう. このときは

$$\Gamma(1) = 0! = 1, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

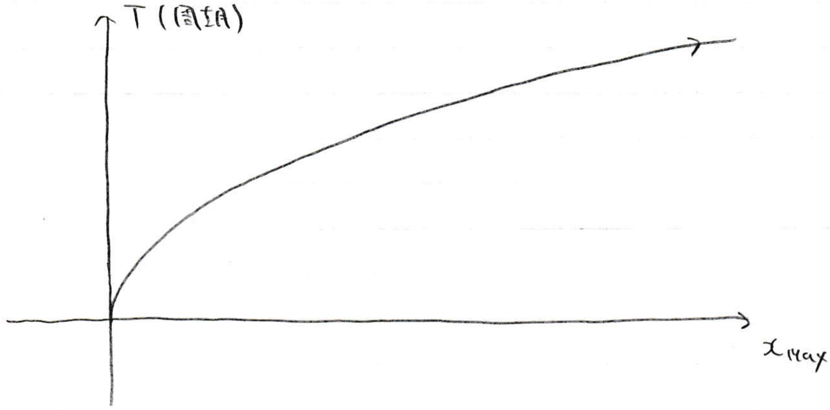
なので

$$T = \frac{2\sqrt{2\pi m}}{A\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}E^{\frac{1}{2}} = \frac{4\sqrt{2m}}{A}\sqrt{E}$$

となる. $E = Ax_{max}$ であるのでこれより

$$T = 4\sqrt{\frac{2m}{A}x_{max}}$$

である. つまり T は最大高さのルートに比例する.



また, $n=2$ のときは T は完全に E によらずに

$$T = \frac{\cancel{2}\sqrt{2\pi m}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\cancel{2}A^{\frac{1}{2}}\,\Gamma(1)} = \frac{\pi\sqrt{2m}}{A^{\frac{1}{2}}} \quad \cdots ④$$

となる. ここでポテンシャルを

$$U(x) = Ax^2 = \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{つまり} \quad A = \frac{1}{2}k$$

として④に代入すると

$$T = \pi\sqrt{2m}\sqrt{\frac{2}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

となる. これはまさに調和振動子でよく知られた結果である.

$U = -U_0/\cos^2\alpha x$ のとき　（ただし $-U_0 < E < 0$）

周期 T は

$$T = 4\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{E + \dfrac{U_0}{\cosh^2\alpha x}}}$$

$$= 4\sqrt{\frac{m}{2|E|}}\int_0^{x_0}\frac{\cosh\alpha x\,dx}{\sqrt{\dfrac{U_0}{|E|} - \cosh^2\alpha x}}$$

とおける。ここで $\sinh\alpha x = t$ とおいて置換して

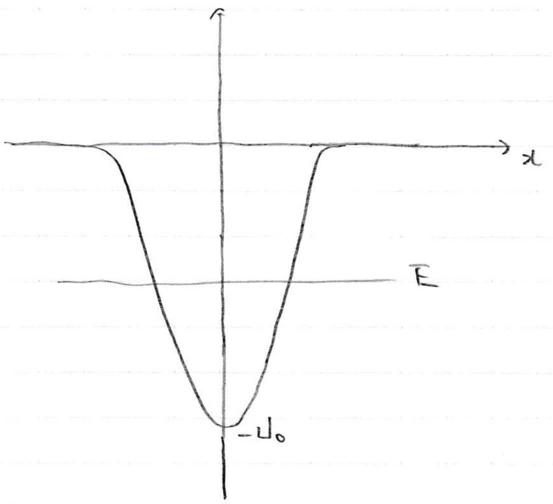
$$T = 4\sqrt{\frac{m}{2|E|}}\int_0^{t_0}\frac{\frac{1}{\alpha}dt}{\sqrt{\dfrac{U_0}{|E|} - 1 - t^2}}$$

$$= \frac{4}{\alpha}\sqrt{\frac{m}{2|E|}}\int_0^{t_0}\frac{dt}{\sqrt{t_0^2 - t^2}} \qquad \left(ただし\ t_0 = \sqrt{\frac{U_0}{|E|} - 1} = \sqrt{-\frac{U_0}{E} - 1}\right)$$

とおける。さらに $t = t_0 u$ とおいて，以上より

$$T = \frac{4}{\alpha}\sqrt{\frac{m}{2|E|}}\underbrace{\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}}_{=\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{\alpha}\sqrt{\frac{m}{2|E|}}$$

である。



$\underline{U(x) = U_0 \tan^2 \alpha x}$ のとき

$$T = 4\sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{E - U_0 \tan^2 \alpha x}} \qquad \left(E = U_0 \tan^2 \alpha x_0 \right)$$

$$= 4\sqrt{\frac{m}{2E}} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{1 - \beta^2 \tan^2 \alpha x}} \qquad \left(\beta = \sqrt{\frac{U_0}{E}} \right)$$

ここで

$$\beta^2 \tan^2 \alpha x = t^2$$

$$dx = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\beta}\frac{1}{1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2} dt$$

とおくと

$$T = \frac{4}{\alpha\beta}\sqrt{\frac{m}{2E}} \int_0^1 \frac{dt}{(1+\gamma^2 t^2)\sqrt{1-t^2}} \qquad \left(\gamma = \frac{1}{\beta} = \sqrt{\frac{E}{U_0}} \right)$$

となる。

ここで，積分公式

$$\int \frac{dx}{(1+ax^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a+1}} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{a+1}\, x}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

を用いる。以上より

$$T = \frac{\cancel{4}^{\,2}}{\alpha}\sqrt{\frac{\cancel{E}}{U_0}}\sqrt{\frac{m}{2\cancel{E}}}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{E}{U_0}+1}}\,\frac{\pi}{\cancel{2}} = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{m}{2}}\,\pi\,\frac{1}{\sqrt{E+U_0}}$$

$$= \underline{\frac{\pi\sqrt{2m}}{\alpha\sqrt{E+U_0}}}$$

である。