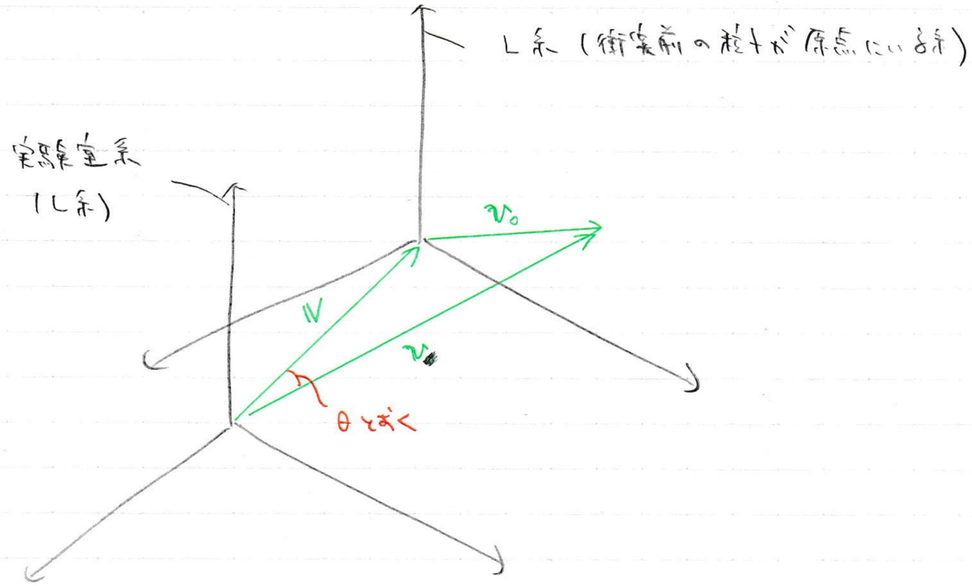
§16 粒子の崩壊



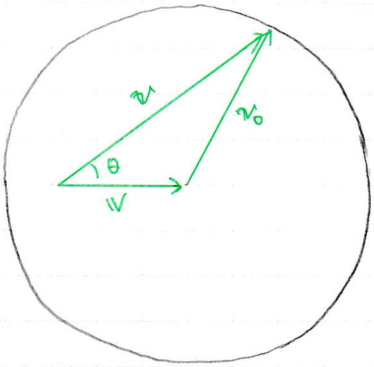
$\boldsymbol{v}$ は実験室からみた崩壊後の粒子の速度方向であり，$\boldsymbol{v}_0$ は衝突前の粒子からみた崩壊後の粒子の方向である．

図から

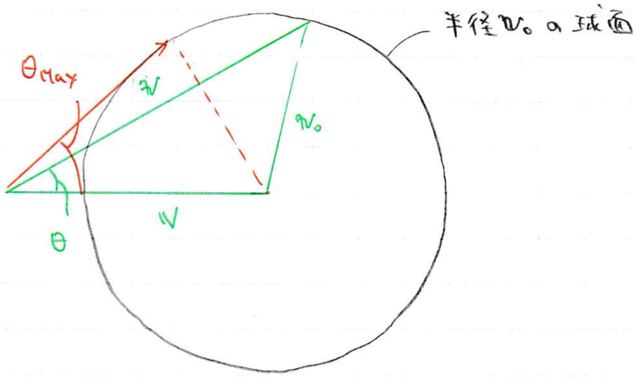
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{V}$$

$$\therefore \quad v_0^2 = v^2 + V^2 - 2vV\cos\theta \qquad (16.3)$$

これを図式的に表すと，下図のようになる．



$V < v_0$ のとき



$V > v_0$ のとき

図からただちにわかるように，$V > v_0$ のとき，つまり崩壊前の粒子の速度にくらべて崩壊後の粒子の速度のほうがおそい場合，θ には $90°$ 以下の最大角度が定まる．
その角度を θ_{max} とすると，

$$\sin\theta_{max} = \frac{v_0}{V} \qquad (16.4)$$

また，図から，一般的に

$$\tan\theta = \frac{v_0 \sin\theta_0}{v_0 \cos\theta_0 + V} \qquad (16.5)$$

とかける．これを θ_0 についてとくと，

$$v_0 \sin\theta_0 = \tan\theta\,(v_0 \cos\theta_0 + V)$$

$$\therefore\ v_0^2(1 - \cos^2\theta_0) = \tan^2\theta\,(v_0^2 \cos^2\theta_0 + 2Vv_0\cos\theta_0 + V^2)$$

$$\therefore\ 0 = (1 + \tan^2\theta)\,v_0^2\cos^2\theta_0 + 2Vv_0\tan^2\theta\cos\theta_0 + V^2\tan^2\theta - v_0^2$$

$$\therefore\ 0 = \cos^2\theta_0 + 2\left(\frac{V}{v_0}\right)\sin^2\theta\cos\theta_0 + \left(\frac{V}{v_0}\right)^2\sin^2\theta - \cos^2\theta$$

$$\therefore\ \cos\theta_0 = -\left(\frac{V}{v_0}\right)\sin^2\theta \pm \sqrt{\left(\frac{V}{v_0}\right)^2\sin^4\theta - \left(\frac{V}{v_0}\right)^2\sin^2\theta + \cos^2\theta}$$

$$= -\left(\frac{V}{v_0}\right)\sin^2\theta \pm \sqrt{\left(\frac{V}{v_0}\right)^2\sin^2\theta\,(\sin^2\theta - 1) + \cos^2\theta}$$

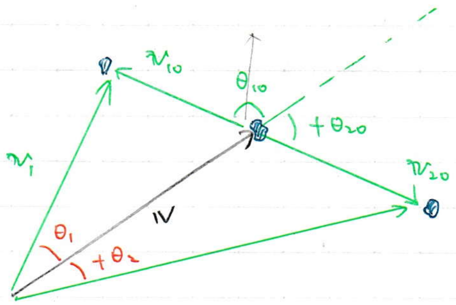
$$= -\left(\frac{V}{v_0}\right)\sin^2\theta \pm \cos\theta\sqrt{1 - \left(\frac{V}{v_0}\right)^2\sin^2\theta} \qquad (16.6)$$

となる．

(16.6)式の符号について考えてみる．まず，$V < v_0$ のときは明らかに解は1つしかなく，それらは θ にたいしてつねに連続的に成り立っている．これより，$V = 0$ のときつねに $\theta = \theta_0$ とならなければならないことに注目して，$V < v_0$ のときは正の値をとる．

$V > v_0$ のときは図から同じ θ にたいして2つの θ_0 がありうるので，実際の θ_0 が(16.6)式のうち $\pm$ のいずれの解なのかは，この式だけでは特定できない．

2粒子の崩壊について



図から

$$\tan\theta_1 = \frac{v_{10}\sin\theta_0}{V + v_{10}\cos\theta_0} \quad \cdots ①$$

$$\tan\theta_2 = \frac{v_{20}\sin\theta_{20}}{V + v_{20}\cos\theta_{20}}, \quad \theta_{20} = \pi - \theta_0 \quad \cdots ②$$

である．また，運動量保存より

$$m_1 v_{10} = m_2 v_{20} = p_0 \quad \cdots ③$$

エネルギー保存則は，内部エネルギーの減少を ΔE として

$$\Delta E = \frac{p_0^2}{2m_1} + \frac{p_0^2}{2m_2} = \frac{p_0^2}{2\mu} \quad \left(\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} : 慣性質量\right)$$

$\cdots ④$

以上が得られる情報のすべてである．

m_1, m_2, V, θ_1, θ_2 の関係を求めてみよう．まず，①，②より

$$\begin{cases} (V + v_{10}\cos\theta_0)\tan\theta_1 = v_{10}\sin\theta_0 \\ (V - v_{20}\cos\theta_0)\tan\theta_2 = v_{20}\sin\theta_0 \end{cases}$$

これより，$\sin\theta_0$, $\cos\theta_0$ を求める：

$$\sin\theta_0 = \frac{\tan\theta_1\tan\theta_2}{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}\left(\frac{V}{v_{10}} + \frac{V}{v_{20}}\right)$$

$$\cos\theta_0 = \frac{1}{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}\left(\frac{V}{v_{10}}\tan\theta_1 - \frac{V}{v_{20}}\tan\theta_2\right)$$

2式より $\sin^2\theta_0+\cos^2\theta_0=1$ を用いて

$$1=\frac{1}{(\tan\theta_1+\tan\theta_2)^2}\left\{\tan^2\theta_1\tan^2\theta_2\left(\frac{V}{v_{10}}+\frac{V}{v_{20}}\right)^2+\left(\frac{V}{v_{10}}\tan\theta_1-\frac{V}{v_{20}}\tan\theta_2\right)^2\right\}$$

$$\therefore\ (\tan\theta_1+\tan\theta_2)^2=\tan^2\theta_1\tan^2\theta_2\left(\frac{V}{v_{10}}+\frac{V}{v_{20}}\right)^2+\left(\frac{V}{v_{10}}\tan\theta_1-\frac{V}{v_{20}}\tan\theta_2\right)^2$$

$$\therefore\ \sin(\theta_1+\theta_2)^2=\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\left(\frac{V}{v_{10}}+\frac{V}{v_{20}}\right)^2+\left(\frac{V}{v_{10}}\sin\theta_1\cos\theta_2-\frac{V}{v_{20}}\sin\theta_2\cos\theta_1\right)^2$$

$$=\left(\frac{V}{v_{10}}\right)^2(\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2+\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2)$$

$$+\left(\frac{V}{v_{20}}\right)^2(\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2+\sin^2\theta_2\cos^2\theta_1)$$

$$+\frac{2V^2}{v_{10}v_{20}}(\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2-\sin\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_2\cos\theta_1)$$

$$=\left(\frac{V}{v_{10}}\right)^2\sin^2\theta_1+\left(\frac{V}{v_{20}}\right)^2\sin\theta_2-\frac{2V^2}{v_{10}v_{20}}\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\theta_1+\theta_2)\quad\cdots⑤$$

となる。さらに③，④より

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{v_{20}}{v_{10}},\qquad \frac{2\Delta E}{m_1+m_2}=\frac{P_0^2}{m_1m_2}=v_{01}v_{02}$$

であるから，これより，⑤は

$$\frac{v_{10}v_{20}}{V^2}\sin(\theta_1+\theta_2)^2=\left(\frac{v_{20}}{v_{10}}\right)\sin^2\theta_1+\left(\frac{v_{10}}{v_{20}}\right)\sin^2\theta_2-2\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\theta_1+\theta_2)$$

$$\therefore\ \frac{2\Delta E}{(m_1+m_2)V}\sin(\theta_1+\theta_2)^2=\frac{m_1}{m_2}\sin^2\theta_1+\frac{m_2}{m_1}\sin^2\theta_2-2\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\theta_1+\theta_2)$$

となる。これが，求める θ_1 と θ_2 のあいだの関係式である。

粒子の方向分布

実際の実験では、粒子は1つではなく多数存在することがほとんどである。そこで、C系からみて粒子が完全に空間的に等方であると仮定したとき、L系からみて粒子が空間的にどのように分布してみえるか考えてみよう。

まずC系について考える。C系では等方分布なので、分布関数を

$$f(\theta_0, \varphi_0) \qquad \left(ただし \int f(\theta_0, \varphi_0)\, d\Omega_0 = 1 \right)$$

とすると、C系では

$$f(\theta_0, \varphi_0) = \frac{1}{4\pi}, \quad \int \frac{1}{4\pi}\, d\Omega_0 = 1$$

である。次にL系について考える。ここで$\mathbb{V}$をz軸方向にとれば、$f(\theta_0, \varphi_0)$は明らかにφ角方向には等方的なので、上の積分は

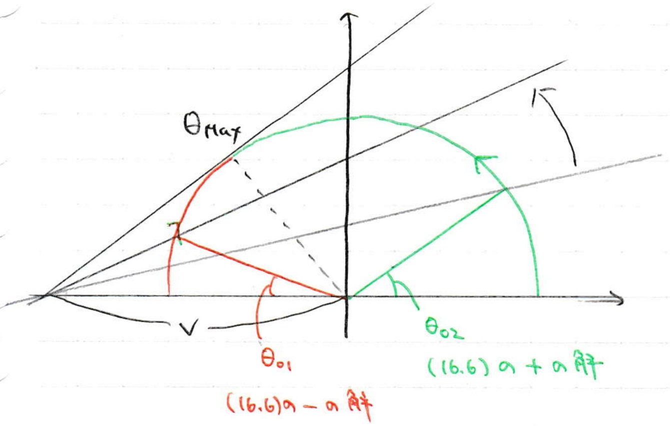
$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin\theta_0\, d\theta_0 = 1 \qquad \cdots ①$$

となる。これをL系にするにはθ_0をθに置換すればよい。置換後、①が

$$① = \int_{全} g(\theta)\, d\theta \qquad \cdots ②$$

とかければ、$g(\theta)$が求める分布関数ということになる。

あとは置換すればおわりなのだが、ここで積分範囲について注意しておかなければならない。$V > v_0$ のとき、積分範囲は以下のように2重になる：



つまり(16.6)における2つの解を

$$\int_0^{\theta_{max}} \qquad \left(但し\ \theta_{max} = \sin^{-1} \frac{v_0}{V} \right)$$

の範囲で積分しなければならないことになる。

いずれにせよ、ここからすぐにわかるように、解は

$$v_0 \overset{?}{\gtrless} V$$

によって異なることになる。

①, ② より

$$\frac{1}{2}\sin\theta_0 d\theta_0 = g(\theta)d\theta$$

なので, (16.6) を微分して $g(\theta)$ を得ればよい,

$$-\sin\theta_0 d\theta_0 = \left[-\frac{V}{v_0}2\sin\theta\cos\theta \pm (-\sin\theta)\sqrt{1-\frac{V^2}{v_0^2}\sin^2\theta} \pm \cos\theta\,\frac{-\frac{V^2}{v_0^2}2\sin\theta\cos\theta}{2\sqrt{1-\frac{V^2}{v_0^2}\sin^2\theta}}\right]d\theta$$

$$= \sin\theta d\theta\left[-\frac{V}{v_0}2\cos\theta \pm \frac{-\left(1-\frac{V^2}{v_0^2}\sin^2\theta\right)-\frac{V^2}{v_0^2}\cos^2\theta}{\sqrt{1-\frac{V^2}{v_0^2}\sin^2\theta}}\right]$$

$$= \sin\theta d\theta\left[\quad '' \quad \pm \frac{1}{\sqrt{}}\left(-1+\frac{V^2}{v_0^2}(\sin^2\theta-\cos^2\theta)\right)\right]$$

となるので, 以上より

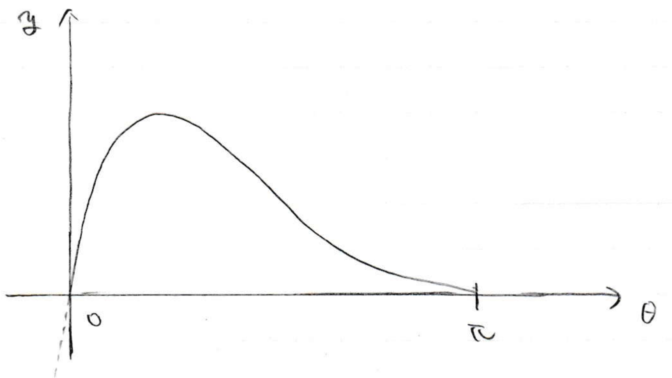
$$\frac{1}{2}\sin\theta_0 d\theta_0 = \frac{\sin\theta}{2}d\theta\left[\frac{V}{v_0}2\cos\theta \pm \frac{1+\frac{V^2}{v_0^2}\cos2\theta}{\sqrt{1-\frac{V^2}{v_0^2}\sin^2\theta}}\right] \cdots ③$$

となる.

(i) $v_0 > V$ のとき, ③のうち+のほうの解をとればよいので,

$$g(\theta) = \frac{\sin\theta}{2}\left[\frac{V}{v_0}2\cos\theta \pm \frac{1+\frac{V^2}{v_0^2}\cos2\theta}{\sqrt{1-\frac{V^2}{v_0^2}\sin^2\theta}}\right]$$

$y = g(\theta)$ のグラフの概形は以下のようになる.



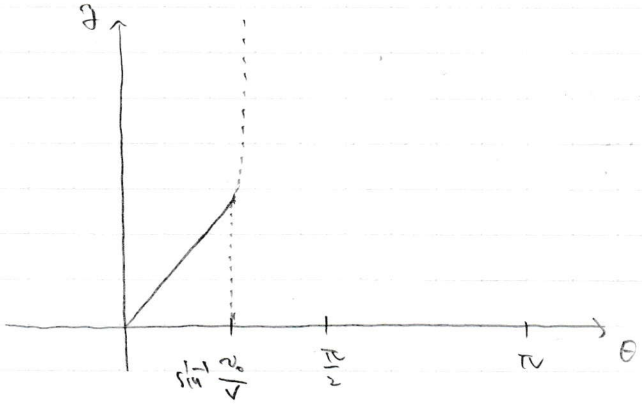
(ii) $v_0 < V$ のとき，③のうち＋の解を $g_+(\theta)$，－の解を $g_-(\theta)$ とかくと，積分は

$$\int_0^{\theta_{max}} g_+(\theta)\,d\theta + \int_{\theta_{max}}^{0} g_-(\theta)\,d\theta$$

となる．これより，あらためて $g(\theta) = g_+(\theta) - g_-(\theta)$ とおくことができて，

$$g(\theta) = \frac{1+\frac{V^2}{v_0^2}\cos 2\theta}{\sqrt{1-\frac{V^2}{v_0^2}\sin^2\theta}}\sin\theta \qquad \left(0 < \sin\theta < \frac{v_0}{V}\right)$$

とかける．このグラフの概形は下図のようになる．



(図は $\theta_{max} = \frac{\pi}{4}$，$\frac{v_0}{V} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき)

2つの粒子が崩壊するときの，$\theta_1+\theta_2$ のとりうる値の範囲

16-2頁において，$\theta_1+\theta_2$ がとりうる値の分布について調べてみよう．
まず，①，②より

$$\tan(\theta_1+\theta_2) = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}$$

$$= \frac{V(v_{10}+v_{20})\sin\theta_0}{V^2 + V(v_{10}-v_{20})\cos\theta_0 - v_{10}v_{20}} \quad \cdots ①$$

とかける．
さらに，今後の議論がしやすいように，$\alpha = \frac{v_{10}}{V}$，$\beta = \frac{v_{20}}{V}$ とおいて，①を

$$f(\theta_0) = \frac{(\alpha+\beta)\sin\theta_0}{1-(\beta-\alpha)\cos\theta_0 - \alpha\beta}, \quad \beta > \alpha \quad \cdots ②$$

とおくことにする．$f(\theta_0)$ の最大，最小値を求めればよい．

もっとも注意すべきは，微分して増減をしらべる前にやっておくべきことがあるということである．それは，② を

$$f(\theta_0) = \frac{\dfrac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}\sin\theta_0}{\dfrac{1-\alpha\beta}{\beta-\alpha} - \cos\theta_0} \qquad (0 \leq \theta_0 \leq \pi) \qquad \cdots ③$$

と変形することである．このとき，もし $-1 \leq \frac{1-\alpha\beta}{\beta-\alpha} \leq 1$ であるならば，$f(\theta_0)$ は特異点をもつことになる．ちなみにこれは，

$$-1 \leq \frac{1-\alpha\beta}{\beta-\alpha} \leq 1 \iff (\beta+1)(\alpha-1) \leq 0 \text{ かつ } (\beta-1)(\alpha+1) \geq 0$$

$$\iff \alpha < 1 < \beta$$

のときである．このとき ③ を

$$f(\theta_0) = \frac{a\sin\theta_0}{b-\cos\theta_0} \qquad (-1 < b < 1)$$

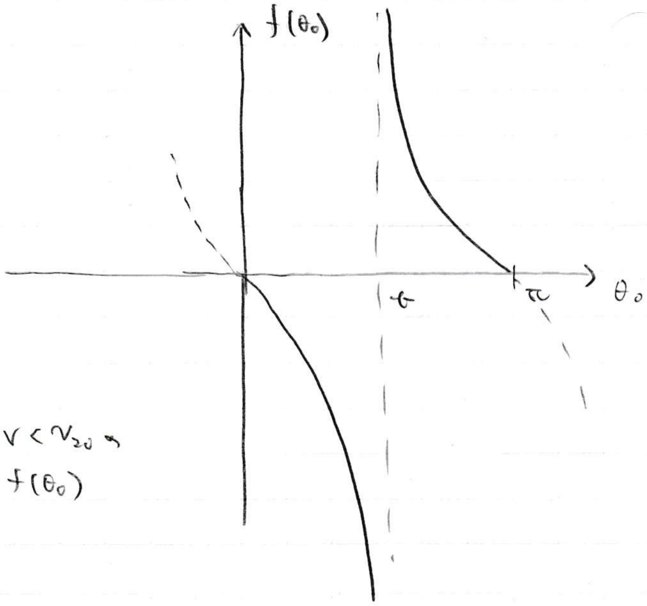
とおいて微分すると

$$f'(\theta_0) = \frac{ab\left(\cos\theta_0 - \frac{1}{b}\right)}{(b-\cos\theta_0)^2}$$

となる．$-1 < b < 0$，$0 < b < 1$ のいずれの場合も，つねに

$$b\left(\cos\theta_0 - \frac{1}{b}\right) < 0 \qquad \therefore f'(\theta_0) < 0$$

となるので，これより $f(\theta_0)$ はつねに単調減少である．以上より $f(\theta_0)$ のグラフの概形は以下のようになる．



$v_{10} < v < v_{20}$ のときの $f(\theta_0)$

なお，$f(\theta_0) < 0$ は，$\frac{\pi}{2} < \theta_1+\theta_2 < \pi$ を意味する．$v_{10} < \theta < v_{20}$ のときで $f(\theta_0)$ が負になっていることは図形的にみても明らかである．

$f(\theta_0) = 0$ は，$\theta_1+\theta_2 = 0, \pi$ の2通りが考えられるが，今回の場合は連続性から考えて

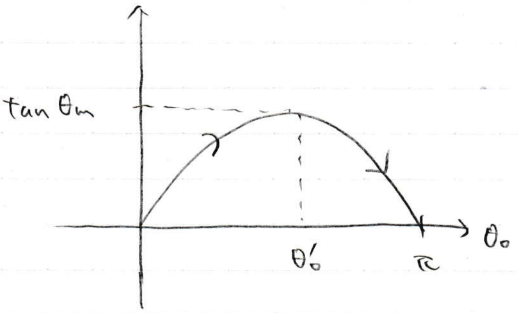
$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \text{ のとき } & \theta_1+\theta_2 = \pi \\ \quad\ \pi & \qquad\qquad\quad 0 \end{cases}$$

と考えるべきである．

次に $\dfrac{1-\alpha\beta}{\beta-\alpha} > 1$ のとき。これは $\alpha<\beta<1$ のときである。
このとき、特異点はなくて、

$$f'(\theta_0) = \frac{(1-\alpha\beta)(\alpha+\beta)\cos\theta_0 - (\alpha+\beta)(\beta-\alpha)}{\{1+(\alpha-\beta)\cos\theta_0 - \alpha\beta\}^2}$$

これより、グラフの概形は以下のようになる。

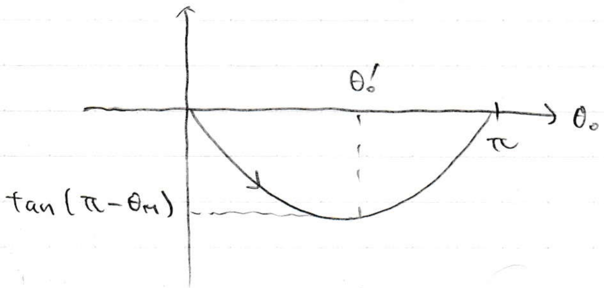


ただし

$$\cos\theta_0' = \frac{\beta-\alpha}{1-\alpha\beta} \quad \cdots ④$$

が極値である。

$\dfrac{1-\alpha\beta}{\beta-\alpha} < 1$ のとき、つまり $1<\alpha<\beta$ のときも基本的に同じだが、$f'(\theta_0)$ の正負がことなる。



さいごに、θ_M を求めておわりにしよう。まず、④を③に代入して

$$\tan\theta_M = \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{(\alpha^2-1)(\beta^2-1)}}$$

となる。この形は汚いが、$\sin\theta_M$ ならシンプルに表現できて、

$$\sin\theta_M = \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta} = \frac{V(v_{10}+v_{20})}{V^2 - v_{10}v_{20}}$$

である。