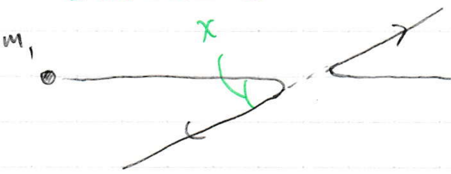
§17 粒子の弾性衝突

C系におけるようす

まずは，C系（つまり，重心系）において考えてみよう．

［角度χだけは完全に自由］



C系からみた衝突の図
（つねに反対向きに運動，また速度の差もひとしい）

まず，運動量が保存しかつその総和が0であることから，粒子は衝突前も後も反対向きに動いている．
また，相対運動エネルギーの保存から速度の差の絶対値

$$|v_1 - v_2|$$

はつねに等しい．これはすぐに考えれば明らかなので，常識としておく．

（衝突の角度χだけは完全に自由であることも知っておく．）

具体的に保存則をたててみよう．このとき

		衝突前		衝突後
粒子1	C系	v_{10}	$\longrightarrow$	v_{10}'
	L系	v_1	$\longrightarrow$	v_1'
粒子2	C系	v_{20}	$\longrightarrow$	v_{20}'
	L系	v_2	$\longrightarrow$	v_2'

とすると

運動量保存　$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = 0 = m_1 v_{10}' + m_2 v_{20}'$ …①

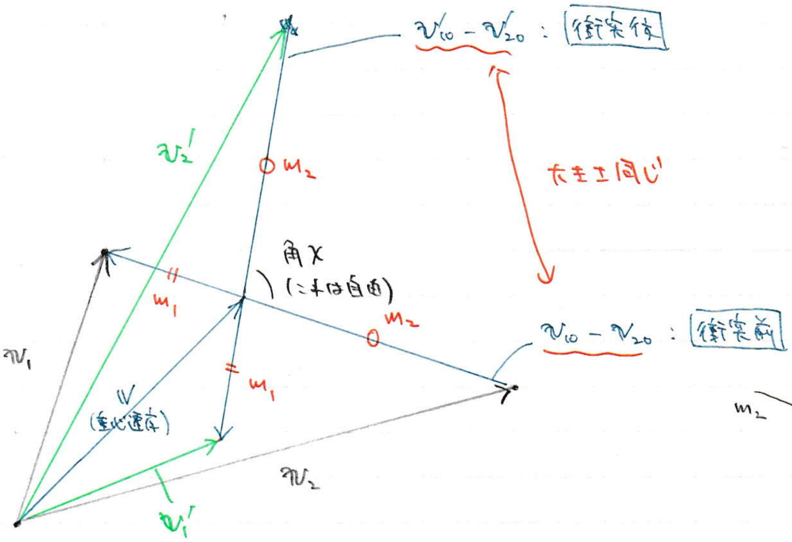
エネルギー保存　$\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}|v_{10} - v_{20}|^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}|v_{10}' - v_{20}'|^2$ …②

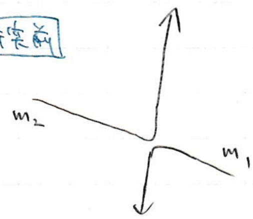
もちろん，②は相対運動エネルギーの保存を示している．

※ $\underbrace{\frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1+m_2}\right)^2}_{\text{重心E}} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}|v_1 - v_2|^2}_{\text{相対E}} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$

は，すぐに示せる（左辺は暗記すべき）

以上の情報を図示すると以下のようになる.





$u = v_1 - v_2$ とおく. u が V を中心としてくるりと角χだけ回転したと考えればよい.

もちろん, 角χは保存則だけでは決まらず衝突面の状況によって決まる値である. ビリヤードはこの角χの自由度によって成り立っているあそびである. もし保存則だけでχまで決まってしまうとしたら, ビリヤードというあそびはなかったかもしれない.

L系における一般論

L系に話をうつそう．$v = |\boldsymbol{v}_{10} - \boldsymbol{v}_{20}| = |\boldsymbol{v}_{10}' - \boldsymbol{v}_{20}'|$ とおいて，$\boldsymbol{n}_0 = \dfrac{\boldsymbol{v}_{10}' - \boldsymbol{v}_{20}'}{v}$ とおく．

このとき，前ページの図より

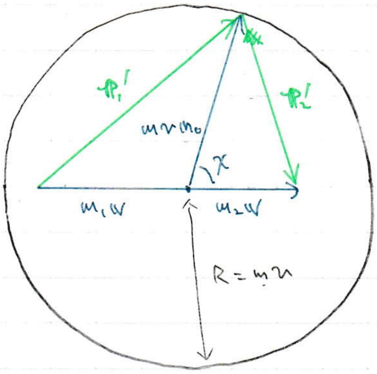
$$\boldsymbol{v}_1' = \boldsymbol{V} + \frac{m_2}{m_1+m_2} v\boldsymbol{n}_0 \qquad \boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{V} - \frac{m_1}{m_1+m_2} v\boldsymbol{n}_0 \qquad (17.2)$$

となる．

運動量は図式化してわかりやすい形にできる．(17.2)より

$$\boldsymbol{p}_1' = m_1\boldsymbol{V} + \mu v\boldsymbol{n}_0, \quad \boldsymbol{p}_2' = m_2\boldsymbol{V} - \mu v\boldsymbol{n}_0$$

これは下図のように図式化できる：



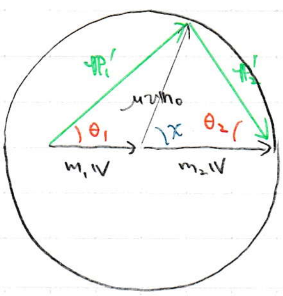
粒子 m_2 が静止しているとき

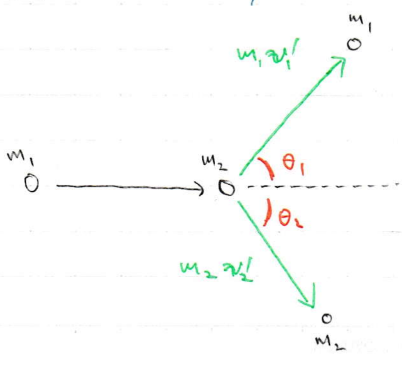
粒子2が静止しているとき，$v = v_1$ となるので，

$$m_2 V = \frac{m_2}{m_1+m_2} m_1 v_1 = \mu v = R$$

なので，ダイアグラムは右のようになる：

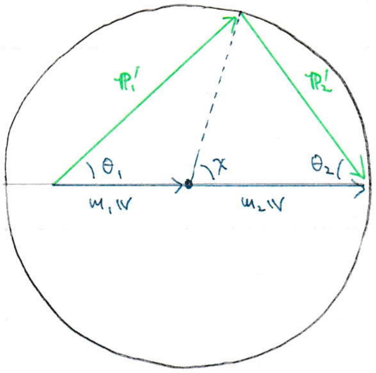
$\chi = \pi$ のとき 正面衝突
$\chi = 0$ のとき 素通り
を示す．



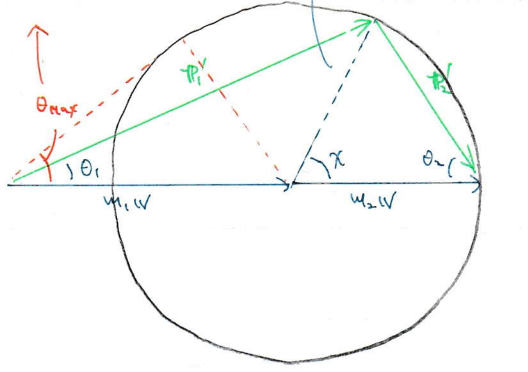


$$\sin\theta_{max} = \frac{m_2}{m_1} \qquad (17.8)$$

$$\mu v = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{10}'$$



$m_1 < m_2$ のとき



$m_1 > m_2$ のとき

θ_1 と θ_2 のあいだの関係を求めよう. まず,

$$\tan\theta_1 = \frac{\dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2} v_{10}' \sin\chi}{m_1 \dfrac{m_1 v_{10}'}{m_1+m_2} + \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2} v_{10}' \cos\chi} = \frac{m_2 \sin\chi}{m_1 + m_2\cos\chi} \qquad (17.4)$$

$$2\theta_2 + \chi = \pi \qquad \therefore\ \chi = \pi - 2\theta_2 \qquad (17.4)$$

である. 2式より

$$\tan\theta_1 = \frac{m_2 \sin(2\theta_2)}{m_1 - m_2\cos(2\theta_2)}$$

となる. $m_1/m_2 = \alpha$ とおいて

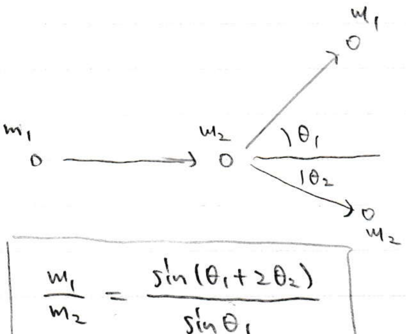
$$\therefore\ (\alpha - \cos 2\theta_2)\sin\theta_1 = \sin(2\theta_2)\cos\theta_1$$

$$\therefore\ \alpha\sin\theta_1 = \sin\theta_1\cos 2\theta_2 + \sin 2\theta_2\cos\theta_1 = \sin(\theta_1 + 2\theta_2)$$

以上より

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin(\theta_1 + 2\theta_2)}{\sin\theta_1}$$

である. これが m_2 が静止しているときの一般的な式である.



$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin(\theta_1 + 2\theta_2)}{\sin\theta_1}}$$

正面衝突（$\chi=\pi$）のとき

(17.2)より，$m_0=-1$ となることに注意して

$$v_1' = \frac{m_1 v_1}{m_1+m_2} - \frac{m_2}{m_1+m_2}v_1 = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1$$

$$v_2' = \frac{m_1 v_1}{m_1+m_2} + \frac{m_1}{m_1+m_2}v_1 = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1 \qquad (17.6)$$

となる．

p_2' が最大となるのは，$\chi=\pi$ である．つまり (17.6) における v_2' は v_2' の最大値である．このとき，やはりエネルギーの最大値 E_{2max} は

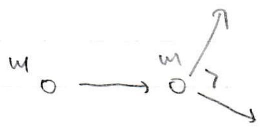
$$E_{2max} = \frac{1}{2}m_2 v_2'^2$$

$$= \frac{1}{2}m_2\frac{4m_1^2}{(m_1+m_2)^2}v_1^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}E_1 \qquad \left(E_1 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2\right)$$

である．E_1 ははじめ m_1 がもっていた全運動エネルギーである．

$m_1=m_2$ のとき

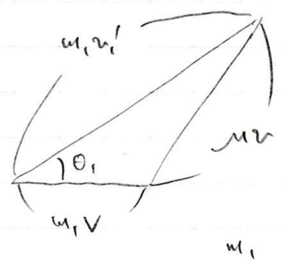
p_1 と p_2 は明らかに直交する．



v_1' と θ の関係

さいごに，v_1' と θ の関係について求めよう．まず，余弦定理より

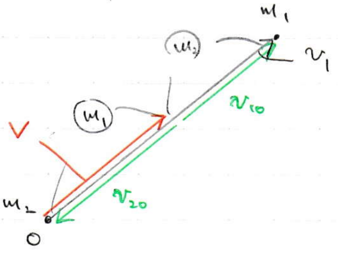
$$(mv)^2 = (m_1 v_1')^2 + (m_1 V)^2 - 2m_1^2 v_1' V\cos\theta \quad \cdots ①$$



である．さらに，

$$v = v_1, \quad V = \frac{m_2}{m_1+m_2}v_1$$

であるから，これを①に代入して



$$\frac{m_1^2 m_2^2}{(m_1+m_2)^2} v^2 = m_1^2 v_1'^2 + \frac{m_1^4}{(m_1+m_2)^2} v^2 - 2 m_1^2 v_1' \frac{m_1}{m_1+m_2} v \cos\theta$$

$$\therefore \quad \frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2} = \left(\frac{v_1'}{v_1}\right)^2 + \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2} - 2\left(\frac{v_1'}{v_1}\right)\frac{\mu}{m_2}\cos\theta$$

これより

$$0 = \left(\frac{v_1'}{v_1}\right)^2 + \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} - 2\left(\frac{v_1'}{v_1}\right)\frac{\mu}{m_2}\cos\theta$$

となる. 以上から

$$\frac{v_1'}{v_1} = \frac{\mu}{m_2}\cos\theta \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{m_2}\cos\theta\right)^2 - (m_1-m_2)}$$

$$= \frac{m_1}{m_1+m_2}\cos\theta \pm \frac{1}{m_1+m_2}\sqrt{m_1^2\cos^2\theta - (m_1-m_2)(m_1+m_2)}$$

$$= \frac{m_1}{m_1+m_2}\cos\theta_1 \pm \frac{1}{m_1+m_2}\sqrt{-m_1^2\sin^2\theta_1 + m_2^2} \quad \cdots ②$$

である. $m_1 < m_2$ のときは明らかに②においてルートの中身が負になることはないが, 解は + のときにかぎられる. 一方, $m_1 > m_2$ のときは ±両方の解がありうるが, ルートの中身が正でなければならないという条件より, θ_1 には

$$\sin\theta_{max} = \frac{m_2}{m_1}$$

という上限がある. これはまさに (17.8) 式にほかならない.