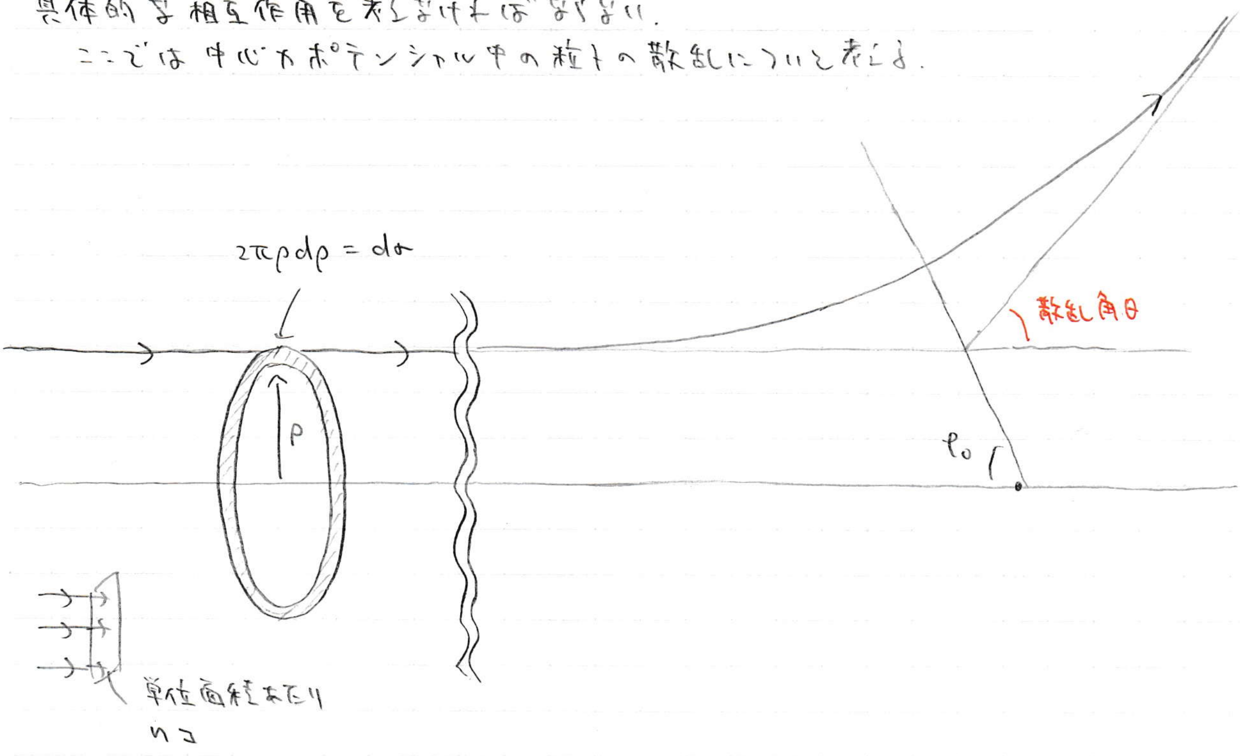
§18 粒子の散乱

前節でものべたように，具体的に散乱角χを決定するためには，保存則だけでなく具体的な相互作用を考えなければならない．
ここでは中心力ポテンシャル中の粒子の散乱について考える．



ここでは散乱角θが根源的なパラメータであることに注目する．$\theta \sim \theta + d\theta$にたいして$d\rho$，$d\sigma$がつねに連続的に1つに定まるとする．このとき，

$$d\sigma = 2\pi\rho\, d\rho \tag{18.6}$$

である．これはさらに

$$d\sigma = 2\pi\rho(\theta)\left|\frac{d\rho(\theta)}{d\theta}\right| d\theta \tag{18.7}$$

とかける．さらに立体角を$d\Omega$とするとφは等方的なので

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta\, d\theta$$

とかける．以上から

$$d\sigma = \frac{\rho(\theta)}{\sin\theta}\left|\frac{d\rho(\theta)}{d\theta}\right| d\Omega \tag{18.8}$$

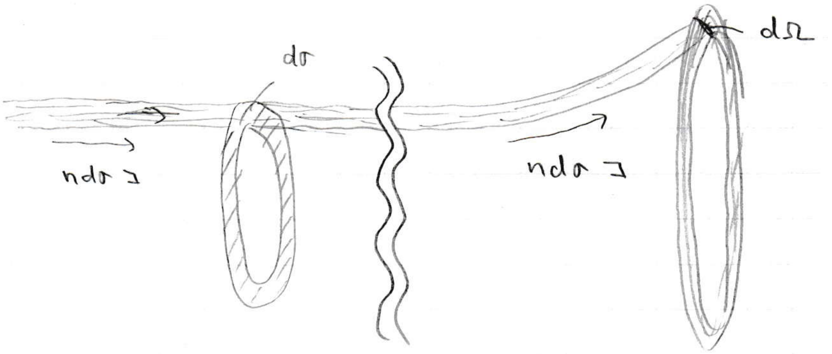
とかける．

ここで

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{\rho(\theta)}{\sin\theta}\left|\frac{d\rho(\theta)}{d\theta}\right| = \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{2}\rho^2\right) \quad \cdots ①$$

はとくに微分散乱断面積とよばれる.

①の物理的意味について考える. まず, 単位面積あたり n コの粒子がとんでくるので, $d\sigma$ にとんでくる粒子の数は $nd\sigma$ コである. この $nd\sigma$ コの粒子がすべて立体角 $d\Omega$ の方向に飛んでいく.



これは逆にいえば, 立体角 $d\Omega$ にはいってくる粒子の個数が $nd\sigma$ であることを示している. この個数の単位立体角あたり(つまり個数の分布)を知りたいならば, それは $nd\sigma$ を $d\Omega$ で割って

$$\frac{nd\sigma}{d\Omega}$$

とすればよい. これをさらに n で割ったものは, 単位面積あたり 1 コの粒子が入ってきたときの計算になる.

よって, ①は単位面積あたり 1 コの粒子が入射したとき, θ方向に単位立体角あたりどれだけの粒子が入ってくるかの分布を示している.

なお, ①を全Ωで積分したものは全断面積とよばれる. 当然ながら, ポテンシャルが遠キョリにおよぶ場合は理論上 $\sigma_{全} = \infty$ になることもありうる.

さて、①式をみるとすぐにわかるように、①を具体的な状況で計算するには $p(\theta)$ を θ で具体的に表現せねばならない。これを求めるための一般的な処方せんについて考える。

まず、エネルギー保存は

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} \qquad (M = p_\theta = \text{一定}) \qquad \cdots ②$$

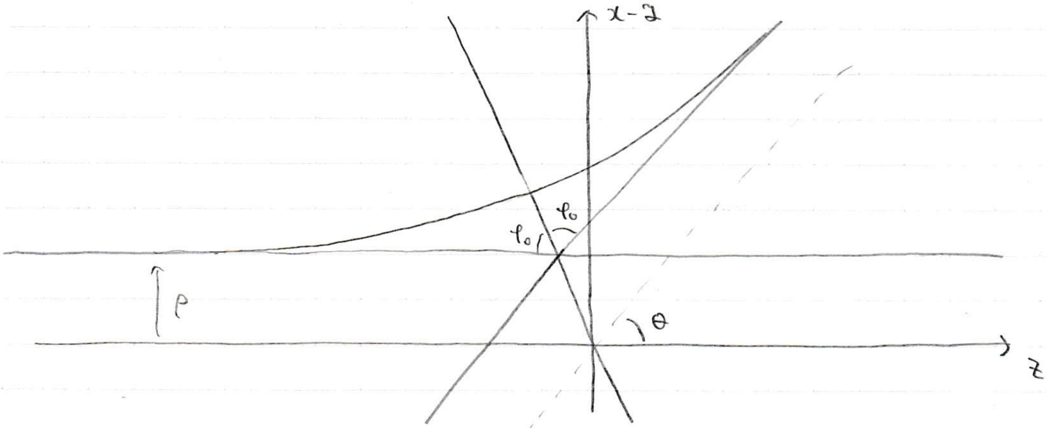
とかける。これより、$M = mr^2\dot{\theta}$ も用いて

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2}\,dr}{\sqrt{2m(E-U(r)) - \frac{M^2}{r^2}}} + \mathrm{const} \qquad \cdots ③$$

とかける。ここで我々が求めたいのは下図における φ_0 であるので、積分区間は

$$\varphi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{M}{r^2}\,dr}{\sqrt{2m(E-U(r)) - \frac{M^2}{r^2}}} \qquad \cdots ④$$

とすればよい。ここで r_{min} は $\dot{r}$ の符号が反転するところである（つまり $\dot{r}=0$ となるところである）。実際の④の計算では積分を求めたあとに r_{min} の代入結果を0にすれば φ_0 は求まる。（あるいは、③の不定積分を求めたあとに、$r = r_{min}$ を代入したときに $\varphi = 0$ となるように const を調整すればよい）。



ここで上図より

$$2\varphi_0 + \theta = \pi$$

（正確には $\varphi_0 > \pi$ も考えて $\theta = |\pi - 2\varphi_0|$）

であるから、このようにして φ_0 から θ を求めることができる。

ところで無限遠でのエネルギーおよび角運動量保存則より

$$E = \frac{1}{2} m v_\infty^2, \quad M = m\rho v_\infty \tag{18.3}$$

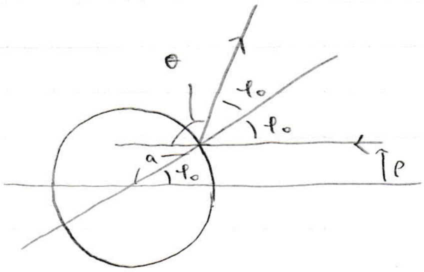
なので，代入して

$$\varphi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U}{m v_\infty^2}}} \tag{18.4}$$

である．

以上で一般論は終わりである．以下でいくつか具体的に確認しよう．

半径 a の絶対剛体球（絶対に動かない，井戸型ポテンシャル）



細かく考える前にまずは $\rho(\theta)$ を求める！
今回は (18.4) をわざわざ計算しなくても
右図のような図形的考察により計算できて

$$\rho(\theta) = a \sin\varphi_0 = a \sin\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right)$$

$$= a \cos\frac{\theta}{2}$$

これより ① より

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{a\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}\left| -\frac{a}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right| = \frac{a^2}{4} = \mathrm{const}$$

これは散乱が完全に等方的であることを示す．

また，全散乱断面積 σ_{tot} は

$$\sigma_{tot} = \frac{a^2}{4} \times 4\pi = \pi a^2$$

である．これはまさに球の断面積であり，期待された結果と同じである．

粒子が中心に到達できる引力ポテンシャルの条件

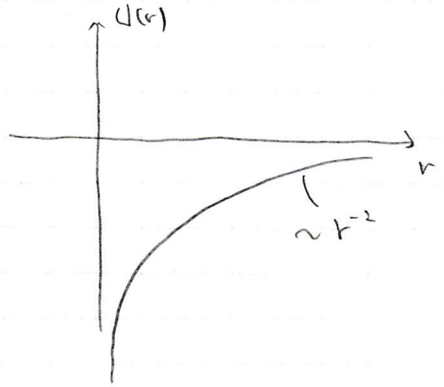
重力および電磁気力においては $U(r) \propto -r^{-1}$ であるが，r^{-2} 以上になるとより短距離力となり引き合う力が強くなるので，条件がよければ粒子が中心に到達できてしまう．ここでは，その条件について考えてみる．

(i) $U = -\frac{\alpha}{r^2}$ のとき

エネルギー保存は

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r^2}$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + \left(\frac{M^2}{2m} - \alpha\right)\frac{1}{r^2}$$



これより，条件

$$\frac{M^2}{2m} - \alpha < 0 \quad \cdots ①$$

をみたす粒子についてはポテンシャルが右図のようになってしまうので，初期条件で $\dot{r} < 0$ である粒子は，明らかに無限に吸い込まれていく．

ここで無限遠での速度を v_∞ とすると

$$M = mv_\infty\rho$$

これより①に代入して

$$\frac{v_\infty^2\rho^2 m}{2} - \alpha < 0 \quad \therefore\ v_\infty^2\rho^2 m < 2\alpha \quad \cdots ②$$

これより，②をみたす ρ の範囲は

$$0 < \rho < \sqrt{\frac{2\alpha}{mv_\infty^2}} = \rho_{max}$$

である．以上より中心へ向かう全断面積は

$$\sigma_{tot} = \int_0^{\rho_{max}} 2\pi\rho\, d\rho = \pi\rho_{max}^2 = \frac{2\alpha\pi}{mv_\infty^2}$$

である．

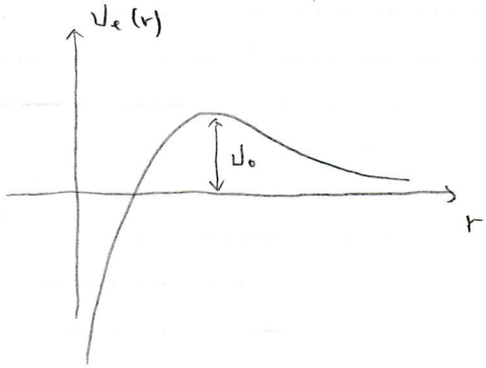
(ii) $U = -\alpha/r^n$ $(n>2,\ \alpha>0)$ のとき

$$\sigma_{tot} = \int_0^{\rho_{max}} 2\pi\rho\, d\rho = \pi\rho_{max}^2$$

の方針はまったく同じだが，ρ_{max} を求めるのがめんどい．

エネルギー保存

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{M^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r^n}}_{U_{eff}(r)}$$



$U_{eff}(r)$ の概形は右図のようになる（これは直観的に明らか）．はじめ無限遠では $\dot{r} = -v_\infty < 0$ であるので，すべての粒子が向心方向にやってくる．このうち，$U_0 < E$ である粒子だけが山を越えて中心にやってくる．

以上より，まずは U_0 を求めて，そのあとに

$$U_0 < E = \frac{1}{2}mv_\infty^2$$

を解いて ρ の範囲を得ればよい．

$$f(r) = +\frac{M^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r^n}$$

とおくと

$$f'(r) = \frac{n\alpha}{r^{n+1}} - \frac{M^2}{mr^3} = \frac{n\alpha}{r^3}\left(\frac{1}{r^{n-2}} - \frac{M^2}{n\alpha m}\right)$$

これより極大値は

$$r_0^{n-2} = \frac{n\alpha m}{M^2} \qquad \therefore r_0 = \left(\frac{n\alpha m}{M^2}\right)^{\frac{1}{n-2}}$$

以上から

$$U_0 = f(r_0) = \frac{M^2}{2m}\left(\frac{n\alpha m}{M^2}\right)^{-\frac{2}{n-2}} - \alpha\left(\frac{n\alpha m}{M^2}\right)^{-\frac{n}{n-2}}$$

$$= \frac{n}{2}\alpha\left(\frac{M^2}{n\alpha m}\right)\left(\frac{n\alpha m}{M^2}\right)^{-\frac{2}{n-2}}$$

$$= \frac{n}{2}\alpha\left(\frac{n\alpha m}{M^2}\right)^{-\frac{n}{n-2}} - \alpha\left(\frac{n\alpha m}{M^2}\right)^{-\frac{n}{n-2}}$$

$$= \frac{(n-2)\alpha}{2}\left(\frac{M^2}{n\alpha m}\right)^{\frac{n}{n-2}}$$

これより解くすは

$$U_0 = \frac{(n-2)\alpha}{2}\left(\frac{M^2}{n\alpha m}\right)^{\frac{n}{n-2}} < \frac{1}{2}mv_\infty^2, \quad M = m\rho v_\infty$$

である。これより

$$\frac{(n-2)\alpha}{\cancel{2}}\left(\frac{m\rho^2 v_\infty^2}{n\alpha}\right)^{\frac{n}{n-2}} < \frac{1}{\cancel{2}}mv_\infty^2$$

$$\therefore \quad \rho^{\frac{2n}{n-2}} < \left(\frac{n\alpha}{mv_\infty^2}\right)^{\frac{n}{n-2}} \frac{mv_\infty^2}{(n-2)\alpha}$$

$$\therefore \quad 0 < \rho < \left(\frac{n\alpha}{mv_\infty^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{mv_\infty^2}{(n-2)\alpha}\right)^{\frac{n-2}{2n}}$$

$$= \sqrt{\frac{n\cancel{\alpha}}{\cancel{mv_\infty^2}}}\sqrt{\frac{\cancel{mv_\infty^2}}{(n-2)\cancel{\alpha}}}\left(\frac{(n-2)\alpha}{mv_\infty^2}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \sqrt{n}\,(n-2)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \rho_{max}$$

である。以上より

$$\sigma_{tot} = \pi\rho_{max}^2 = \underline{\pi n (n-2)^{\frac{2-n}{n}}\left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^{\frac{2}{n}}}$$

である。

<u>星の衝突</u>

十分大きな質量 m_2, 半径 R の球形の星（動かない）に、質量 m_1 の粒子が飛んでくるとき、粒子 m_1 が m_2 にのみこまれる断面積を求める。

粒子1の力学的エネルギー保存

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r} \qquad (\alpha = Gm_1m_2) \qquad \cdots ①$$

解きたい ρ の条件は、$r_{min} < R$ である。r_{min} のとき $\dot{r} = 0$ なので

$$E = \frac{M^2}{2mr_{min}^2} - \frac{\alpha}{r_{min}}$$

$$r_{min}^2 + \frac{\alpha}{E}r_{min} - \frac{M^2}{2mE} = 0$$

$$\therefore \quad r_{min} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\alpha}{E} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{E^2} + 4\frac{M^2}{2mE}}\right) < R$$

となる。

$M = m_1 v_\infty \rho$, $E = \frac{1}{2} m_1 v_\infty^2$ として これをとくと

$$\rho_{max} = R^2 + \frac{2R\alpha}{m_1 v_\infty^2}$$

以上より

$$\sigma_{tot} = \pi \rho_{max} = \pi R^2 \left(1 + \frac{2\alpha}{m_1 R v_\infty^2} \right)$$

$$= \underline{\pi R^2 \left(1 + \frac{2 G m_2}{R v_\infty^2} \right)}$$

である。