

§19 74' 78-1' 80' 82'

$$U = +\alpha/r \text{ 2c2}$$

$$p_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{M}{r} dr}{\sqrt{2m(E - \frac{\alpha}{r}) - \frac{M^2}{r^2}}} \quad \dots ①$$

∴ $r_{\min}$ は被積分関数の代入結果が $\sqrt{\quad} = 0$ となるからである。
積分の針はケプラー問題のときと同じである。まず

$$z = \frac{1}{r} \quad dz = -\frac{dr}{r^2} \quad z_0 = \frac{1}{r_{\min}} \quad \dots ②$$

と置く。これより

$$\begin{aligned} p_0 &= \int_{z_0}^0 \frac{-M dz}{\sqrt{2mE - 2mdz - M^2 z^2}} \\ &= \int_{z_0}^0 \frac{-dz}{\sqrt{-z^2 - \frac{2md}{M^2} z + \frac{2mE}{M^2}}} \end{aligned}$$

と置く。∴ z は t の関数

$$-z^2 - \frac{2md}{M^2} z + \frac{2mE}{M^2} = -\left(z + \frac{md}{M^2}\right)^2 + \underbrace{\left(\frac{md}{M^2}\right)^2}_{=k^2 \text{ と置く}} + \frac{2mE}{M^2}$$

と置くの z ,

$$z + \frac{md}{M^2} = kt \quad \left(\text{ただし } k = \sqrt{\left(\frac{md}{M^2}\right)^2 + \frac{2mE}{M^2}} \right)$$

$$dz = k dt, \quad \begin{array}{c|c} z & z_0 \rightarrow 0 \\ \hline t & t_0 \rightarrow t_1 \end{array} \quad (t_1 = \frac{md}{kM^2})$$

と置く、

$$\begin{aligned} p_0 &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{-k dt}{\sqrt{-k^2 t^2 + k^2}} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \cos^{-1} t_1 - \underbrace{\cos^{-1} t_0}_0 \end{aligned}$$

と置く。以上より k を代入して

$$p_0 = \cos^{-1} \frac{\frac{md}{M^2}}{\sqrt{\left(\frac{md}{M^2}\right)^2 + \frac{2mE}{M^2}}}$$

である。

これから適い $\rho(\theta)$ を求めよう. $M = mpv_{\infty}$, $E = \frac{1}{2}mv_{\infty}^2$ である.

$$\cos \theta_0 = \frac{\frac{md}{M}}{\sqrt{\left(\frac{md}{M}\right)^2 + 2mE}} = \frac{\frac{d}{\rho v_{\infty}}}{\sqrt{\left(\frac{d}{\rho v_{\infty}}\right)^2 + m^2 v_{\infty}^2}} = \frac{\frac{d}{mp v_{\infty}^2}}{\sqrt{\left(\frac{d}{mp v_{\infty}^2}\right)^2 + 1}}$$

これから

$$\frac{1}{\cos^2 \theta_0} = 1 + \tan^2 \theta_0 = \frac{\left(\frac{d}{mp v_{\infty}^2}\right)^2 + 1}{\left(\frac{d}{mp v_{\infty}^2}\right)^2} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{d}{mp v_{\infty}^2}\right)^2}$$

$$\therefore \rho^2 = \left(\frac{d}{mv_{\infty}^2}\right)^2 + \tan^2 \theta_0$$

これから. $\pm \theta'$ に $2\theta_0 + \theta = \pi$ である. θ は θ_0 より大きい.

$$\rho^2 = \left(\frac{d}{mv_{\infty}^2}\right)^2 + \tan^2 \frac{\pi - \theta}{2} = \left(\frac{d}{mv_{\infty}^2}\right)^2 + \frac{1}{\tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

これから,

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{2} \rho^2 \right) = \frac{1}{2 \sin \theta} \left(\frac{d}{mv_{\infty}^2} \right)^2 \frac{2}{\tan^3 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \left(\frac{d}{2mv_{\infty}^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

これは $\frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$ の形である.