# 第5章 微小振動

## §21 1次元の自由振動

一般化座標 $q$ において ポテンシャルが安定なつり合い点 $(q=q_0)$ をもつとする. このとき, $q=q_0$ の近くでは粒子は微小振動をする.

ポテンシャル $U(q)$ を $q=q_0$ のまわりでテイラー展開して

$$U(q) = U(q_0) + U'(q_0)(q-q_0) + \frac{U''(q_0)}{2}(q-q_0)^2 + \cdots$$

ここで $q$ の一次の項は そのかたむきが一定であると考えると 明らかに安定なつり合い点の表現として適当ではない. よってこの項は 0 でなければならない.

以上より, 2次の項までとって

$$U(q) - U(q_0) = \frac{U''(q_0)}{2}(q-q_0)^2$$

とくに $U''(q_0) = k$ として

$$U(q) - U(q_0) = \frac{k}{2}(q-q_0)^2$$

となる. ポテンシャルの基準は自由なので $q_0$ を基準として

$$\therefore \quad U(q) = \frac{k}{2}q^2$$

となる.

### 一次元デカルト座標

もっとも簡単なのは, 一次元デカルト座標での振動である.
このときのラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 \quad \cdots ①$$

となる. これより

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

$$\therefore \quad m\ddot{x} + kx = 0 \quad \cdots ②$$

となる. これの一般解は

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\right) \quad \cdots ③$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$$

である.

初期条件を $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$ とすると③より

$$A = x_0, \qquad B\omega = v_0$$

となる．以上より

$$x(t) = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

$$= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}\,\sin(\omega t + \delta) \qquad \left( \text{ただし } \tan\delta = \frac{x_0}{\frac{v_0}{\omega}} \right)$$

である．全エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}mx^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\dot{x}^2 = \frac{1}{2}ma^2 \qquad \left( a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \text{ ：振幅} \right)$$

である．

## 複素数での表現

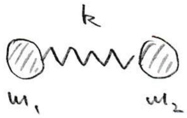
複素数を使って $x(t)$ を表現することができる．このとき，実際に $x(t)$ として物理的な意味をもつのは $\mathbb{R}$ の方の解である．そのため，実際の解答では Re をとりだす必要がある．

このとき，$x(t)$ は

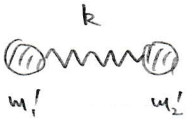
$$x(t) = Ae^{i\omega t} \qquad \left( A = ae^{i\delta} \right) \qquad (21.11)$$

とかける．$A \in \mathbb{C}$ は振幅と位相の情報を同時にもち，複素振幅とよばれる．
このように表現する何よりのメリットは，微分（積分）しても形が変わらないことである．
また，線形の演算（和差・スカラー倍）もなんの問題もない．

## アイソトープ原子




ことなった2つのアイソトープ2原子分子がばねでつながれている．角振動数の比 $\omega'/\omega$ を求める．




それぞれの原子間きょりを $x$, $x'$ とする．運動量は保存するので，重心運動エネルギーは一定である．これより相対運動エネルギーとポテンシャルの和だけ考えればよい．

これより

$$E = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$E' = \frac{1}{2}\frac{m_1' m_2'}{m_1'+m_2'}\dot{x}'^2 + \frac{1}{2}kx'^2$$

となるので,

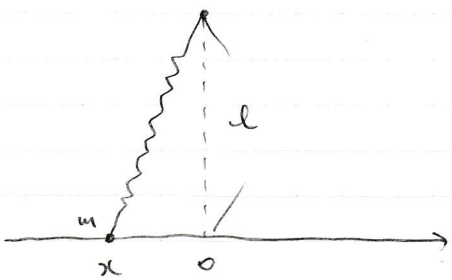
$$\omega = \sqrt{\frac{k(m_1+m_2)}{m_1 m_2}}, \quad \omega' = \sqrt{\frac{k(m_1'+m_2')}{m_1' m_2'}}$$

以上より

$$\frac{\omega'}{\omega} = \sqrt{\frac{m_1 m_2(m_1'+m_2')}{m_1' m_2'(m_1+m_2)}}$$

である.

ばねの一端に結びつけられた粒子の一次元運動 (下図)




粒子は長さ $l$ のとき力 $F$ をばねから受けるとする.
このとき振動の周期 $T$ を求める.

Newton力学, Lagrange力学, Hamilton力学の3つの方法でそれぞれ解いてみることにしよう.

[解法1] (Newton力学)

ばねの $l$ からの微小なのびを $\delta l$ とする. このとき, $\delta l = \sqrt{x^2+l^2} - l$ であり, ポテンシャル $U(x)$ は

$$U(x) = \frac{1}{2}k(l+\delta l-l_0)^2$$

$$\approx \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 + \underbrace{k(l-l_0)}_{=F}\delta l$$

$$= \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 + F\delta l \quad \cdots ①$$

となる．ただし $l_0$ はばねの自然長である．①の第一項はポテンシャルの基準を表しているだけなので今回はどうでもいい．

さらに，$\delta l$ は

$$\delta l = \sqrt{l^2 - x^2} - l \approx \frac{x^2}{2l} \qquad \cdots ②$$

とかける．ここで一般化された二項定理

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots$$

を使った．①，②より

$$U(x) = \frac{1}{2}\frac{F}{l}x^2 + (\text{定数})$$

なので，以上より

$$\omega = \sqrt{\frac{F}{ml}} \qquad \therefore \quad \underline{T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{F}}}$$

である．

[解法2] Lagrande 力学

ラグランジアン L は

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k\left(\sqrt{l^2+x^2} - l_0\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kl^2\left(\sqrt{1+\left(\frac{x}{l}\right)^2} - \frac{l_0}{l}\right)^2$$

$$\approx \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kl^2\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{l_0}{l}\right)^2$$

ただしばねの自然長 $l_0$ は

$$k(l - l_0) = F \qquad \therefore \quad l_0 = l - \frac{F}{k}$$

である．以上より，ラグランジュ方程式に代入して

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) &= m\ddot{x} \\
\frac{\partial L}{\partial x} &= -\frac{1}{\cancel{2}}k\cancel{l^2}\,\cancel{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{l_0}{l}\right)\left(\frac{x}{\cancel{l}}\right)\frac{1}{\cancel{l}} \\
&\approx -kx\left(1 - \frac{l_0}{l}\right) = -\frac{F}{l}x
\end{aligned}\right\} \cdots ③$$

以上より，ラグランジュ方程式（つまり運動方程式）は

$$m\ddot{x} = -\frac{F}{l}x$$

となる．よって周期 T は

$$\omega = \frac{F}{ml} \qquad \therefore \ \underline{T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{F}}}$$

である．

［解法3］ Hamilton 力学

ハミルトニアン H は

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kl^2\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{l_0}{l}\right)^2$$

これより，正準方程式

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{x}, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{p}$$

に代入して

$$\dot{x} = \frac{p}{m}$$

$$-\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{F}{l}x \qquad \text{（計算は①と同じ）}$$

となる．以上より

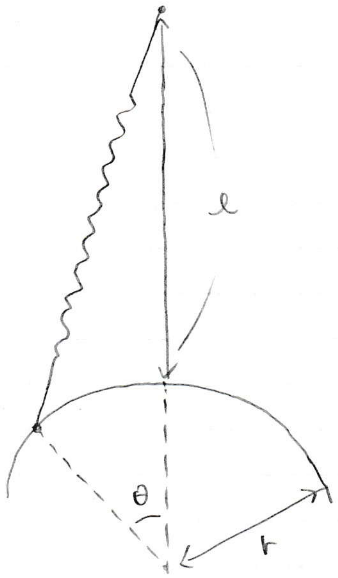
$$\dot{p} = m\ddot{x} = -\frac{F}{l}x$$

となるので，これより，やはり

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{F}}$$

である．

## 同様の問題で、粒子が円上をうごくとき




粒子が複雑な軌跡の上を動く場合は、一般にニュートン力学で解くのは非常に難しいので、だまってラグランジアンにたよるのがよい。

まず、粒子が$\theta$にいるときのばねののびは

$$\sqrt{r^2+(\theta+r)^2-2r(r+l)\cos\theta}$$

$$=\sqrt{2r(r+l)\cos\theta+l^2}$$

$$\simeq\sqrt{2r(r+l)\frac{\theta^2}{2}+l^2}$$

$$=l\sqrt{\frac{r(r+l)}{l^2}\theta^2+1}$$

$$\simeq l\left(1+\frac{1}{2}\frac{r(r+l)}{l^2}\theta^2\right) \qquad \left(\because \frac{r\theta}{l}\ll 1\right)$$

である。

以上より、ラグランジアン$L$は

$$L=\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}k\left\{\sqrt{r^2+(\theta+r)^2-2r(r+l)\cos\theta}-l_0\right\}^2$$

$$\simeq\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}kl^2\left\{\frac{r(r+l)}{l^2}\theta^2+\frac{F}{kl}\right\}^2$$

となる。以上より

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)=mr^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=-\frac{1}{\cancel{2}}k\cancel{l^2}\,\cancel{2}\left\{\frac{r(r+l)}{l^2}\theta^2+\frac{F}{kl}\right\}\frac{r(r+l)}{\cancel{l^2}}\theta$$

$$\simeq -k\,r(r+l)\theta\frac{F}{kl} \qquad \left(\because \frac{r\theta}{l}\ll 1\right)$$

$$=-\frac{r(r+l)F}{l}\theta \qquad \cdots ①$$

となり、ラグランジュ方程式は

$$mr^2\ddot{\theta} = -\frac{r(r+l)F}{l}\theta \qquad \cdots ②$$

となる。以上より、角振動数$\omega$は

$$\omega = \sqrt{\frac{F(r+l)}{mrl}}$$

である。

もちろん、これはHamilton力学でも解くことができる。ハミルトニアンは

$$H = \frac{p^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}k\left\{\sqrt{r^2+(l+r)^2-2r(r+l)\cos\theta} - l_0\right\}^2$$

$$\simeq \frac{p^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}kl^2\left\{\frac{r(r+l)}{2l^2}\theta^2 + \frac{F}{kl}\right\}^2$$

これより

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{mr^2} \qquad \therefore\ p = mr^2\dot{\theta}$$

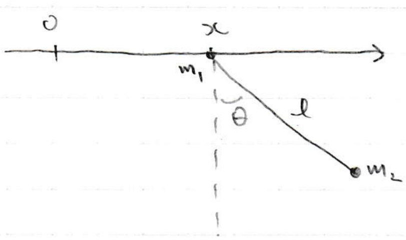
$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\dot{p} = \frac{F}{l}r(r+l)\theta \qquad (①と同じ計算)$$

となるので、2式をあわせて

$$mr\ddot{\theta} = -\frac{Fr(r+l)}{l}\theta$$

となる。これは②式にほかならない。

<u>支点が水平方向に動ける振り子の$\omega$</u>




ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(l\dot{\theta}\sin\theta)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}+l\dot{\theta}\cos\theta)^2 + mgl\cos\theta$$

$$= \frac{1}{2}(m_1+m_2)^2 + \frac{1}{2}m_2l^2\dot{\theta}^2 + m_2\dot{x}\dot{\theta}l\cos\theta + mgl\cos\theta$$

となる。

このとき，明らかに

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad \therefore \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = P_x = (一定)$$

である．すなわち $x$ 方向の全運動量は保存する(このことは直観的にも明らかである)．
今回は角振動数 $\omega$ を求めたいだけなので，$P_x = 0$ とみなしてしまってまったく問題ない($x$ 方向の重心からみていることになるだけ)．このとき

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x} + m_2 \dot{\theta} l \cos\theta = 0$$

$$\therefore \quad \dot{x} = -\frac{m_2 l \dot{\theta} \cos\theta}{m_1 + m_2}$$

となるので，ラグランジアン $L$ に代入して，$\theta \ll 1$ のとき

$$L = \frac{1}{2}\frac{m_2^2}{m_1+m_2}\dot{\theta}^2 l^2 \cos^2\theta + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{m_2^2}{m_1+m_2} l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2\theta + mgl\cos\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{m_2^2}{m_1+m_2}\dot{\theta}^2 l^2 \cos^2\theta + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_2^2}{m_1+m_2}\dot{\theta}^2 l^2 (1-\cos^2\theta) + mgl\cos\theta$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} l^2 \dot{\theta}^2}_{\sim\theta^2} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{m_2^2}{m_1+m_2}\dot{\theta}^2 l^2 \sin^2\theta}_{\sim\theta^4} + \underbrace{mgl\cos\theta}_{\sim\theta^2}$$

$$\simeq \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} l^2 \dot{\theta}^2 + mgl\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)$$ ($\theta^2$ までひろってくる)

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m_2 g l \theta^2 + \underbrace{mgl}_{どうでもいい}$$

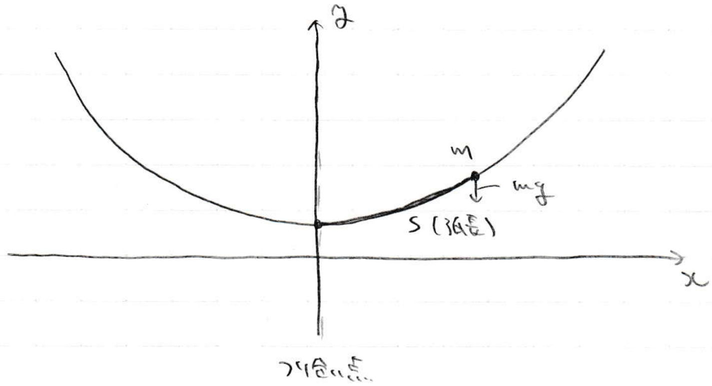
となる．以上より

$$\omega = \sqrt{\frac{\cancel{m_2} g \cancel{l} (m_1+m_2)}{m_1 \cancel{m_2} l^{\cancel{2}}}} = \boxed{\sqrt{\frac{g(m_1+m_2)}{m_1 l}}}$$

である．

## 重力場におけるサイクロイド軌跡では正確に $\omega = \sqrt{k/m}$ となること

単振り子では微小振動において近似的に $\omega = \sqrt{k/m}$ とみなせることがわかった。それでは、$\omega = \sqrt{k/m}$ が正確に成り立つのは、粒子がどのような曲線上を動くときなのか。




軌跡上の一般化座標を $s$ とする。このとき粒子の運動エネルギーは $\frac{1}{2}m\dot{s}^2$ のままでよいので、ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - mg\,y(s)$$

である。このポテンシャルの部分が $\frac{1}{2}ks^2$ になってほしいので、これより $y(s)$ は

$$mg\,y(s) = \frac{1}{2}ks^2$$

$$\therefore\quad y = \frac{k}{2gm}s^2 = \frac{\omega^2}{2g}s^2 \qquad \cdots ①$$

をみたす必要がある。また、

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \qquad \cdots ②$$

である。①, ②より

$$x = \int \sqrt{\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 - 1}\,dy = \int \sqrt{\frac{g}{2y\omega^2} - 1}\,dy$$

となるので、

$$y = \frac{g}{4\omega^2}(1 - \cos\xi) \qquad \cdots ③$$

とおくと、

$$\frac{g}{2\omega^2 y} = \frac{2}{1-\cos\xi}, \qquad dy = \frac{g}{4\omega^2}\sin\xi\, d\xi$$

となり

$$x = \int \sqrt{\frac{2}{1-\cos\xi} - 1} \cdot \frac{g}{4\omega^2}\sin\xi\, d\xi$$

$$= \frac{g}{4\omega^2}\int \sqrt{\frac{1+\cos\xi}{1-\cos\xi}}\,\sin\xi\, d\xi$$

$$= \frac{g}{4\omega^2}\int \frac{1}{\sqrt{\tan^2\frac{\xi}{2}}}\sin\xi\, d\xi$$

$$= \frac{g}{4\omega^2}\int \frac{\cos\frac{\xi}{2}}{\cancel{\sin\frac{\xi}{2}}}\, 2\cancel{\sin\frac{\xi}{2}}\cos\frac{\xi}{2}\, d\xi$$

$$= \frac{g}{4\omega^2}\int (1+\cos\xi)\, d\xi = \frac{g}{4\omega^2}(\xi + \sin\xi) \qquad \cdots ④$$

となる. 以上より, ③, ④で軌跡Sはパラメータ表示できる.

軌跡を具体的に図示しよう. ③, ④より

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{g}{4\omega^2}(1+\cos\xi), \qquad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{g}{4\omega^2}\sin\xi$$

となる. 以上より

| $\xi$ | $-\pi$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $\frac{g\pi}{4\omega^2}$ | | $0$ | | $\frac{g\pi}{4\omega^2}$ |
| $y$ | $\frac{g}{2\omega^2}$ | | $0$ | | $\frac{g}{2\omega^2}$ |
| $\frac{\partial x}{\partial \xi}$ | $0$ | $+$ | $\frac{g}{2\omega^2}$ | $+$ | $0$ |
| $\frac{\partial y}{\partial \xi}$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ |
| 概 | ① | ↘ | → | ↗ | ① |

となり, 右のような軌跡がえがける.
これはまさにサイクロイドである.