§22 強制振動

調和振動にくわえて，外場にともなうポテンシャル $U_e(x,t)$ がある場合について考える．ラグランジアンLは

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 - U_e(x,t) \quad \cdots ①$$

となる．ここで x が微小であるとすると，一次まで拾ってきて

$$U_e(x,t) \simeq \underbrace{U_e(0,t)}_{\text{どうでもいい}} + \frac{\partial U}{\partial x}(0,t)\,x \qquad (\text{ダッシュは } x \text{ 微分})$$

とかける．一項目は時間の全微分でかけるのでどうでもいい．そこで2項目について
これを

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = -F(t)$$

とおくと，ラグランジアンLは

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 + F(t)x \qquad (22.1)$$

とかける．これよりラグランジュ方程式は

$$m\ddot{x} = -kx + F(t)$$

$$\therefore \ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m} \qquad \left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\right) \qquad (22.2)$$

となる．

これを解く一般的な方法がある．まず

$$\xi = \dot{x} + i\omega x \qquad (22.9)$$

とおくと，

$$\dot{\xi} - i\omega\xi = \frac{F(t)}{m} \qquad (22.8)$$

とかける．これを解くために

$$\xi = A(t)e^{i\omega t}$$

とおいて ④ を ③ に代入すると

$$A'(t)e^{i\omega t} + \cancel{i\omega A(t)e^{i\omega t}} - \cancel{i\omega A(t)e^{i\omega t}} = \frac{F(t)}{m}$$

$$\therefore A'(t) = \frac{F(t)}{m}e^{-i\omega t}$$

となる. 以上より, これを積分して

$$A(t) = \int \frac{1}{m}F(t)\,e^{-i\omega t}\,dt + \xi_0$$

$$\therefore\ \xi(t) = e^{i\omega t}\left\{\int \frac{1}{m}F(t)\,e^{-i\omega t}\,dt + \xi_0\right\} \qquad (22.10)$$

である. ただし, $\xi_0 = \xi(0)$ は初期条件によってきまる定数である.
$\xi(t)$ の $\mathbb{R}$ をとると $v(t)$ が求められ, i をとると $-i\omega x(t)$ が得られる.

<u>F(t) が三角関数のとき</u>

$F(t) = f\cos(\gamma t+\beta)$ $(f,\gamma,\beta \in \mathbb{R})$ とかけるときを考える. このとき (22.2) は

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{f}{m}\cos(\gamma t - \beta) \qquad \cdots ①$$

とかける. ここでこれに対応する $\mathbb{C}$ をつけ加えて, ①を

$$\ddot{z} + \omega^2 z = \frac{f}{m}e^{i(\gamma t-\beta)} \qquad \cdots ②$$

とかく. z を求めたあとに $\mathbb{R}$部をとり出せばよい.

我々の目標は, なんでもいいから ②の特殊解を1つ見つけることである. というのも, みつけた②の特殊解を z_0 とおくと

$$\ddot{z}_0 + \omega^2 z_0 = \frac{F}{m}e^{i(\gamma t-\beta)} \qquad \cdots ③$$

となるので, ②−③より

$$\frac{d^2}{dt^2}(z-z_0) + \omega^2(z-z_0) = 0$$

$$\therefore\ z - z_0 = (\text{斉次式 } \ddot{z} - \omega^2 z = 0 \text{ の一般解})$$

とかけるからである. というわけで特殊解をみつけよう.

(i) $\omega \neq \gamma$ のとき

$$z_0 = b\,e^{i(\gamma t-\beta)} \qquad (b\in\mathbb{C}) \qquad \cdots ④$$

とおいて ②に代入すると

$$-\nu^2 b e^{i(\nu t-\beta)} + \omega^2 b e^{i(\nu t-\beta)} = \frac{F}{m} e^{i(\nu t-\beta)}$$

$$\therefore b(-\nu^2+\omega^2) = \frac{F}{m}$$

$$\therefore \quad b = \frac{f}{m(\omega^2-\nu^2)} \quad (\in \mathbb{R})$$

である．これより，特殊解は

$$z_0 = \frac{f}{m(\omega^2-\nu^2)} e^{i(\nu t-\beta)}$$

$$\therefore x_0 = \mathrm{Re}(z_0) = \frac{f}{m(\omega^2-\nu^2)} \cos(\omega t+\delta) \qquad \cdots ⑤$$

である．以上より，一般解 $x(t)$ は

$$x(t) = a\cos(\omega t+\alpha) + \frac{f}{m(\omega^2-\nu^2)} \cos(\omega t+\delta) \qquad (22.4)$$

（a, α は初期条件によりきまる定数）

である．

(ii) $\nu=\omega$ のとき

このとき，⑤は明らかに特殊解にならない．すなわち，z_0 は④のような形をしていない．そこで，z_0 を

$$z_0 = bte^{i(\nu t-\beta)} \qquad (b \in \mathbb{C})$$

としてみよう．するとこのとき

$$\dot{z}_0 = be^{i(\nu t-\beta)} + i\nu bte^{i(\nu t-\beta)}$$

$$\therefore \quad \ddot{z}_0 = 2i\nu b e^{i(\nu t-\beta)} - \nu^2 bt e^{i(\nu t-\beta)}$$

$$\therefore \quad \ddot{z}_0 + \omega^2 z_0 = 2i\omega b e^{i(\nu t-\beta)} = \frac{f}{m} e^{i(\nu t-\beta)}$$

$$\therefore \quad b = \frac{f}{2i\omega m} = -\frac{fi}{2m\omega}$$

となるので，これより

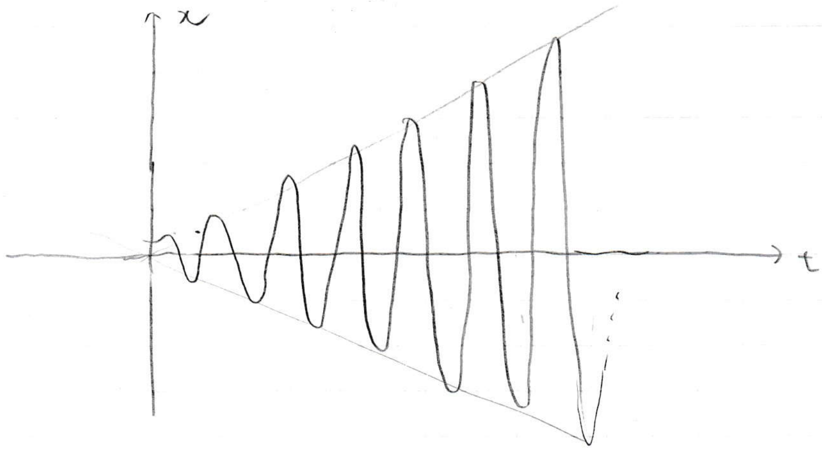
$$z_0 = -\frac{fit}{2m\omega} e^{i(\nu t-\beta)}$$

$$\therefore \quad x_0 = \frac{ft}{2\omega m}\sin(\omega t+\beta)$$

となる. 以上より一般解は

$$x(t) = a\cos(\omega t+\alpha) + \frac{ft}{2\omega m}\sin(\omega t+\beta)$$

となる. これは t が大きくなるにつれて第2項が第1項にくらべてどんどん大きくなっていくことを示しており, 共鳴とよばれる.



<u>うなり ($\nu \sim \omega$ のとき)</u>

ν と ω の値がとても近いときを考えよう. このとき, $\nu = \omega + \varepsilon$ (ε は ω にくらべて十分小さい) とすると, (22.4) は ε をつけ加えて

$$z(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{i(\omega+\varepsilon)t} = (A + Be^{i\varepsilon t})e^{i\omega t} \qquad (22.6)$$

とかける. ここであらためて

$$A + Be^{i\varepsilon t} = c(t)\,e^{i\varphi(t)} \qquad (c(t),\ \varphi(t) \in \mathbb{R})$$

とおくと, $c(t) = |A + Be^{i\varepsilon t}|$ は明らかに (22.6) の大きさを担う. $c(t)$ の時間変化について考えよう.

このとき, $A = ae^{i\alpha}$, $B = be^{i\beta}$ とおくと

$$c(t) = \left|ae^{i\alpha} + be^{i(\varepsilon t+\beta)}\right|$$

$$\therefore \quad c(t)^2 = \left(ae^{i\alpha} + be^{i(\varepsilon t+\beta)}\right)\left(ae^{-i\alpha} + be^{-i(\varepsilon t+\beta)}\right)$$

$$= a^2 + b^2 + ab\,e^{-i(\varepsilon t+\beta-\alpha)} + ab\,e^{i(\varepsilon t+\beta-\alpha)}$$

これより

$$c(t) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\varepsilon t + \beta - \alpha)} \tag{22.7}$$

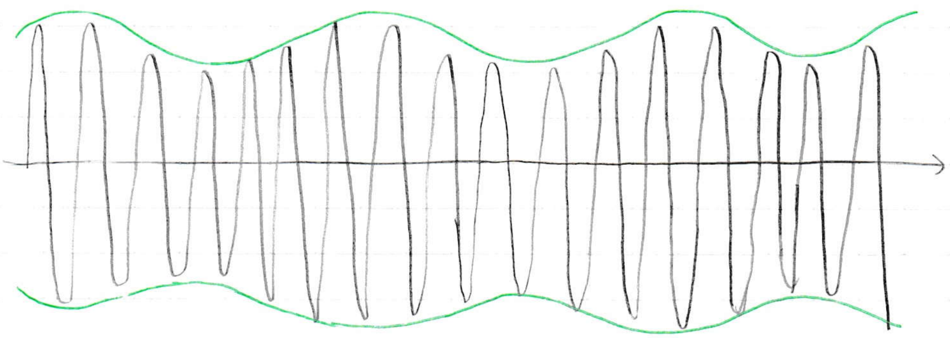
である.

ωにくらべてとてもゆっくりとした振動

(22.7) をみるとよくわかるように, $c(t)$ は

$$|a-b| \leq c(t) \leq |a+b|$$

のあいだをとてもゆっくりとした周期でゆれ動いている. これが"うなり"である.



質点がもらうエネルギー

以前に

$$\xi(t) = \dot{x} + i\omega x$$

とおく一般論を考えた. このとき,

$$|\xi(t)|^2 = \dot{x}^2 + \omega^2 x^2$$

とかけるので, 質点のもつ力学的エネルギー E は

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{m}{2}|\xi(t)|^2 \tag{22.11}$$

とかける! よって, 初期条件を $\xi(-\infty) = 0$, $t<0$ で $F(t) = 0$ とすれば, (22.11) は (22.10) を用いて

$$E = \frac{1}{2m}\left|\int_{-\infty}^{t} F(t)\, e^{-i\omega t}\, dt\right|^2$$

となる. とくに, 十分時間がたった後 ($t \to \infty$) とすれば

$$E = \frac{1}{2m} \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \right|^2$$

となる。絶対値の中身はまさにF(t)のFourier変換である。

<u>さまざまな外力F(t)中の強制振動</u>

$\xi(0) = 0$ を初期条件とする。

(a) $F(t) = F_0$

これは計算を見せるまでもなく

$$x = \frac{F}{m\omega^2}(1 - \cos\omega t)$$

(b) $F(t) = at$

$$\xi(t) = e^{i\omega t} \int_0^t \frac{a}{m} t\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \frac{a e^{i\omega t}}{m} \left[\frac{t}{-i\omega} e^{-i\omega t} - \frac{1}{(-i\omega)^2} e^{-i\omega t} \right]_0^t$$

$$= \frac{a e^{i\omega t}}{m} \left\{ i\frac{t}{\omega} e^{-i\omega t} + \frac{1}{\omega^2}(e^{-i\omega t} - 1) \right\}$$

$$= \frac{a}{m} \left\{ \frac{it}{\omega} + \frac{1}{\omega^2}(1 - e^{i\omega t}) \right\}$$

$$= \frac{a}{m} \left\{ \frac{it}{\omega} + \frac{1}{\omega^2}(1 - \cos\omega t - i\sin\omega t) \right\}$$

これより

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \mathrm{Im}(\xi(t)) = \frac{a}{m\omega} \left\{ \frac{t}{\omega} - \frac{1}{\omega^2}\sin\omega t \right\}$$

$$= \frac{a}{m\omega^3} \{ t\omega - \sin\omega t \}$$

(c) $F(t) = F_0 e^{-\alpha t}$

$$\xi(t) = e^{i\omega t}\int_0^t \frac{F_0}{m} e^{-\alpha t} e^{-i\omega t}\,dt$$

$$= e^{i\omega t}\int_0^t \frac{F_0}{m} e^{-(i\omega+\alpha)t}\,dt$$

$$= \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}\left[\frac{1}{-(i\omega+\alpha)} e^{-(i\omega+\alpha)t}\right]_0^t$$

$$= \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}\,\frac{-(\alpha-i\omega)}{(i\omega+\alpha)(\alpha-i\omega)}\left(e^{-(i\omega+\alpha)t}-1\right)$$

$$= \frac{F_0}{m}\,\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}(i\omega-\alpha)\left(e^{-\alpha t}-e^{i\omega t}\right)$$

$$= \frac{F_0}{m}\,\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}(i\omega-\alpha)\left(e^{-\alpha t}-\cos\omega t - i\sin\omega t\right)$$

$$\therefore\ \mathrm{Im}\,\xi(t) = \frac{F_0}{m}\,\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}\left\{\omega\left(e^{-\alpha t}-\cos\omega t\right)+\alpha\sin\omega t\right\}$$

$$\therefore\ \underline{x(t) = \frac{F_0}{m}\,\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}\left\{e^{-\alpha t}-\cos\omega t+\frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t\right\}}$$

(d) $F(t) = F_0 e^{-\alpha t}\cos\beta t$

ポイントは

$$F(t) = F_0 e^{-\alpha t}\left(\frac{e^{i\beta t}+e^{-i\beta t}}{2}\right) = \frac{F_0}{2}\left(e^{(-\alpha+i\beta)t}+e^{(-\alpha-i\beta)t}\right)$$

とすることである。するとこのとき

$$\xi(t) = e^{i\omega t}\int_0^t \frac{1}{m}\frac{F_0}{2}\left(e^{(-\alpha+\beta i)t}+e^{-(\alpha+\beta i)t}\right)e^{-i\omega t}\,dt$$

$$= \frac{F_0}{2m} e^{i\omega t}\int_0^t \left(e^{(-\alpha+\beta i-\omega i)t}+e^{-(\alpha+\beta i+\omega i)t}\right)dt$$

$$= \frac{F_0}{2m} e^{i\omega t}\left[\frac{1}{-\alpha+\beta i-\omega i}e^{(-\alpha+\beta i-\omega i)t}+\frac{1}{-\alpha-\beta i-\omega i}e^{-(\alpha+\beta i+\omega i)t}\right]_0^t$$

$$= \frac{F_0}{2m}\Bigg[\underbrace{e^{-\alpha t}\left\{\frac{1}{-\alpha+i\beta-i\omega}e^{i\beta t}+\frac{1}{-\alpha-i\beta-i\omega}e^{-i\beta t}\right\}}_{\text{オレンジ項}}\ \underbrace{-\,e^{i\omega t}\left(\frac{1}{-\alpha+\beta i-i\omega}+\frac{1}{-\alpha-i\beta-i\omega}\right)}_{\text{みどり項}}\Bigg]$$

となる。 $\cdots$ ①

まずみどり項のImをとる。それは

$$(\text{みどり}) = -e^{i\omega t}\left(\frac{1}{-\alpha+i\beta+i\omega}+\frac{1}{-\alpha-i\beta-i\omega}\right)$$

$$= e^{i\omega t}\frac{2\alpha+2i\omega}{\alpha^2+\beta^2-\omega^2+2\alpha i\omega}$$

$$= (\cos\omega t+i\sin\omega t)\frac{(2\alpha+2i\omega)(\alpha^2+\beta^2-\omega^2-2\alpha i\omega)}{(\alpha^2+\beta^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}$$

$$= (\cos\omega t+i\sin\omega t)\frac{2\alpha(\alpha^2+\beta^2+\omega^2)+2i\omega(-\alpha^2+\beta^2-\omega^2)}{(\alpha^2+\beta^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{Im}} \frac{2\alpha(\alpha^2+\beta^2+\omega^2)}{\circledast}\sin\omega t+2\omega\frac{-\alpha^2-\omega^2+\beta^2}{\circledast}\cos\omega t \quad \cdots ②$$

$$\left(\text{ただし}\quad \circledast = (\alpha^2+\beta^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2\right)$$

である。

次にオレンジ項のImをとる。まず

$$(-\alpha-i\beta-i\omega)e^{i\beta t}+(-\alpha+i\beta-i\omega)e^{-i\beta t}$$
$$= -2\alpha\cos\beta t+2\beta\sin\beta t-2i\omega\cos\beta t$$

なので、これより

$$(\text{オレンジ}) = e^{-\alpha t}\frac{(-\alpha-i\beta-i\omega)e^{i\beta t}+(-\alpha-i\beta-i\omega)e^{-i\beta t}}{(-\alpha-i\beta-i\omega)(-\alpha+i\beta-i\omega)}$$

$$= e^{-\alpha t}\frac{(\alpha^2+\beta^2-\omega^2)-2\alpha i\omega}{(\alpha^2+\beta^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}(-2\alpha\cos\beta t+2\beta\sin\beta t-2i\omega\cos\beta t)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{Im}} e^{-\alpha t}\frac{1}{\circledast}2\omega\{(\alpha^2+\omega^2-\beta^2)\cos\beta t-2\alpha\beta\sin\beta t\} \quad \cdots ③$$

となる。以上②③を①に代入して

$$x(t) = \frac{1}{\omega}\mathrm{Im}\, z(t)$$

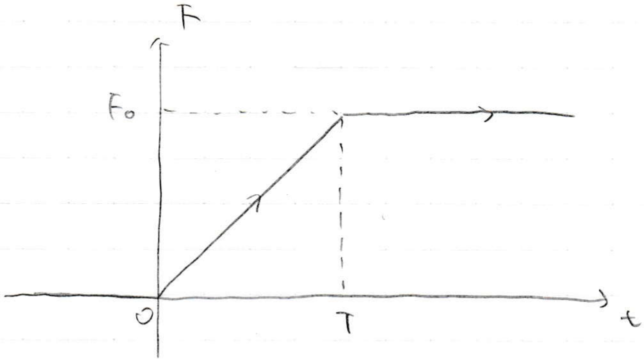
$$= \frac{F_0}{m}\frac{1}{(\alpha^2+\beta^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}\Big[\frac{\alpha}{\omega}(\alpha^2+\beta^2+\omega^2)\sin\omega t+(-\alpha^2-\omega^2+\beta^2)\cos\omega t$$
$$+e^{-\alpha t}\{(\alpha^2+\omega^2-\beta^2)\cos\beta t-2\alpha\beta\sin\omega t\}\Big]$$

である。（計算は少々煩わしいが、$\cos\beta t$ を指数の形にすることに気づけば、方針は単純。）

(e) 右のようなポテンシャル

$$F(t) = \begin{cases} F_0 t/T & (0 < t < T) \\ F_0 & (t > T) \end{cases}$$

$x(t)$, 最終的な振幅 a を求める.



まず, $0<t<T$ では (b) と同じく

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega^3 T}(\omega t - \sin\omega t) \quad (0<t<T)$$

である. $t>T$ では

$$\xi(t) = \frac{1}{m} e^{i\omega t}\left\{ \int_0^T F(t) e^{-i\omega t} dt + \int_T^t F(t) e^{-i\omega t} dt \right\}$$

とすればよい. 積分実行して

$$\xi(t) = \frac{F_0}{mT} e^{i\omega t}\left\{ i\frac{T}{\omega} e^{-i\omega T} + \frac{1}{\omega^2}(e^{-i\omega T} - 1)\right\} + \frac{F_0 i}{m\omega}(1 - e^{i\omega(t-T)}) \cdots ①$$

となる. 解を

$$c_1 \cos\omega(t-T) + c_2 \sin(t-T) + \frac{F_0}{m\omega^2}$$

の形にしたいので①を

$$\xi(t) = \frac{F_0}{mT} e^{i\omega(t-T)}\left\{ i\frac{T}{\omega} + \frac{1}{\omega^2}(1 - e^{i\omega T})\right\} + \frac{F_0 i}{m\omega}(1 - e^{i\omega(t-T)})$$

$$= \frac{F_0}{mT}(\cos\omega(t-T) + i\sin(t-T))\left(\frac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega T) + i\left(\frac{T}{\omega} - \frac{1}{\omega^2}\sin\omega T\right)\right)$$

$$+ \frac{F_0 i}{m\omega}(1 - \cos\omega(t-T) - \sin\omega(t-T))$$

として 上式より Im をとって

$$x(t) = \frac{1}{\omega}\mathrm{Im}\,\xi(t)$$

$$= \frac{F_0}{mT\omega^3}(1-\cos\omega T)\sin(t-T) - \frac{F_0}{mT\omega^3}\sin\omega T\cos\omega(t-T) + \frac{F_0}{m\omega^2}$$

である.

振幅 a は

$$a = \sqrt{\left(\frac{F_0}{mT\omega^3}\right)^2 (1-\cos\omega T)^2 + \left(\frac{F_0}{mT\omega^3}\right)^2 \sin^2\omega T}$$

$$= \left(\frac{F_0}{mT\omega^3}\right)\sqrt{1+1-2\cos\omega T} = \left(\frac{2F_0}{mT\omega^3}\right)\left|\sin\frac{\omega T}{2}\right|$$

である.

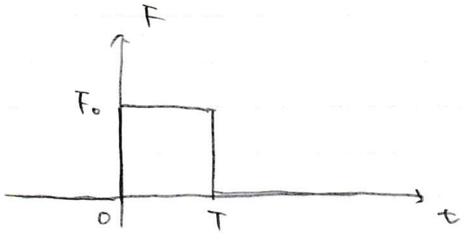
（あるいは, $\xi(t) = \dot{x} + i\omega x$

$$\therefore \ \frac{1}{2}m|\xi(t)|^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = \frac{1}{2}ma^2$$

より $a^2 = \frac{1}{\omega^2}|\xi(t)|^2$ から求めてもよい.）

(f)

$$F(t) = \begin{cases} F_0 & (0<t<T) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$



振幅 a を求める.

$$\xi(t) = e^{i\omega t}\int_0^T \frac{F_0}{m} e^{-i\omega t} dt = \frac{F_0 i}{m\omega} e^{i\omega(t-T)}(1-e^{i\omega T})$$

これより

$$|\xi(t)|^2 = \left(\frac{F_0}{m\omega}\right)^2 |1-e^{i\omega T}|^2 = \left(\frac{F_0}{m\omega}\right)^2 \{(1-\cos\omega T)^2 + \sin^2\omega T\}$$

$$= \left(\frac{2F_0}{m\omega}\right)^2 \sin^2\frac{\omega T}{2}$$

$$\therefore \ a = \sqrt{\frac{1}{\omega^2}|\xi(t)|^2} = \frac{2F_0}{m\omega^2}\left|\sin\frac{\omega T}{2}\right|$$

である.