§23 多くの自由度をもつ系の振動

ここでは微小振動の一般論について考える．一般化座標 q_i $(i=1,\cdots,N)$ でポテンシャルエネルギーが q_{i0} で極小になるとして，

$$x_i = q_i - q_{i0} \qquad \cdots (23.1)$$

とおく．このとき，ポテンシャルエネルギー U を2次までで近似すると，

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} k_{ik} x_i x_k \qquad (23.2)$$

とかける．ただし $x_i x_k$ にかかる項は k_{ik} と k_{ki} の2つあるので，ここから k_{ik} と k_{ki} の定め方には自由度がある．よって，もっとも解きやすいように k_{ik} と k_{ki} は対称とする：

$$k_{ik} = k_{ki}$$

これから添字がいっぱい出てくるので，(23.2) にあるような Σ はすべて略して

$$U = \frac{1}{2} k_{ik} x_i x_k \qquad (\text{Einstein の縮約を用いた})$$

と書くことにする．今後のギロンはすべて線型代数に基づくものなので，特に問題は生じない．同様にして，運動エネルギーも

$$\frac{1}{2} m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k \qquad (m_{ik} = m_{ki})$$

とかける．これより，ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}\left(m_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k - k_{ik}x_i x_k\right)$$

とかける．これより

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = \frac{1}{2} m_{ik}\left(\delta_{ij}\dot{x}_k + \delta_{jk}\dot{x}_i\right)$$

$$= \frac{1}{2} m_{jk}\dot{x}_k + \frac{1}{2} m_{ij}\dot{x}_i = m_{jk}\dot{x}_k$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = -k_{jk}x_k$$

なので，運動方程式は

$$m_{ik}\ddot{x}_k = -k_{ik}x_k \qquad (i = 1, 2, \cdots, N) \qquad (23.5)$$

となる．これは N コの線形連立微分方程式である．

(23.5) を一般的にとくために，まずは特殊解を求めよう．x_k を

$$x_k = A_k e^{i\omega t} \qquad (A_k,\ \omega \text{ はあとで決まる})$$

とおいて代入する．すると

$$-m_{ik}\omega^2 A_k + k_{ik}A_k = 0 \qquad \therefore\ (k_{ik} - m_{ik}\omega^2)A_k = 0 \qquad (23.7)$$

となる．ここから，A_k がすべて 0 でない解をもつためには，〰〰 部の行列式が 0 にならなければならない：

$$|k_{ik} - m_{ik}\omega^2| = 0 \qquad (23.8)$$

これによって ω の N コの解がすべて求まる．それを ω_α $(\alpha = 1, 2, \cdots, N)$ とする．そして各 ω_α について (23.7) の"固有ベクトル" A_k を求めれば問題はおわりである．ただ，今回は A_k を求めるもっと一般的な処方せんについて考えてみよう．まず，

$$b_{ik} = k_{ik} - m_{ik}\omega^2, \qquad B = (b_{ik})_{1\le i,k\le n} \qquad \cdots ①$$

とおいて，b_{ik} の余因子行列を $\tilde{b}_{ik}$ とおくと，一般に

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1N} \\ b_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{N1} & \cdots & & b_{NN} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} & \cdots & \tilde{b}_{1N} \\ \tilde{b}_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \tilde{b}_{N1} & \cdots & & \tilde{b}_{NN} \end{pmatrix} = |B|\, I_N \qquad \cdots ②$$

が成立する（$|B| \neq 0$ のとき $\frac{1}{|B|}\tilde{B} = B^{-1}$ となる）．今回は $|B| = 0$ なので ① の右辺は O である．

② は，行列 $\tilde{B}$ のところを各列ベクトルに分解して

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N1} & \cdots & b_{NN} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{b}_{1\alpha} \\ \tilde{b}_{2\alpha} \\ \vdots \\ \tilde{b}_{N\alpha} \end{pmatrix} = \mathbb{0} \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, N) \qquad \cdots ③$$

と N コの式に切り分けることができる．$\alpha = 1, 2, \cdots, N$ のそれぞれの式にたいして，(23.8) の解 ω_α $(\alpha = 1, 2, \cdots, N)$ を代入すると，③ は

$$\begin{pmatrix} b_{11}^{(\alpha)} & \cdots & b_{1N}^{(\alpha)} \\ b_{21}^{(\alpha)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ b_{N1}^{(\alpha)} & \cdots & b_{NN}^{(\alpha)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{b}_{1\alpha}^{(\alpha)} \\ \tilde{b}_{2\alpha}^{(\alpha)} \\ \vdots \\ \tilde{b}_{N\alpha}^{(\alpha)} \end{pmatrix} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, N) \qquad \cdots ③$$

となる。ここで $b_{ij}^{(\alpha)}$, $\tilde{b}_{ij}^{(\alpha)}$ は b_{ij}, $\tilde{b}_{ij}$ に $\omega = \omega_\alpha$ をそれぞれ代入したものである。
そえ字がややこしいので、$\tilde{b}_{i\alpha}^{(\alpha)}$ を

$$\tilde{b}_{i\alpha}^{(\alpha)} = \Delta_{i\alpha}$$

とかくことにする。これにより、特殊解として我々は (23.7) と ③ をくらべて

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{1\alpha} \\ \Delta_{2\alpha} \\ \vdots \\ \Delta_{N\alpha} \end{pmatrix} \quad かつ \quad \omega = \omega_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, N)$$

注：
係数分だけ自由度があるので、規格化するように定めるのが一般的
㊎ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_1 + \Theta_2)$

を得る。
一般解はこれらの線型結合として

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^{N} C_\alpha \Delta_{1\alpha} e^{i\omega_\alpha t} \\ \sum_{\alpha=1}^{N} C_\alpha \Delta_{2\alpha} e^{i\omega_\alpha t} \\ \vdots \\ \sum_{\alpha=1}^{N} C_\alpha \Delta_{n\alpha} e^{i\omega_\alpha t} \end{pmatrix}$$

とかける。ここで $C_\alpha \in \mathbb{C}$ は適当な定数であり、$\Delta_{i\alpha}$ は $\tilde{b}_{i\alpha}$ に ω_α を代入したものである。
かきかえると、

$$x_i = \sum_{\alpha=1}^{N} C_\alpha \Delta_{i\alpha} e^{i\omega_\alpha t} \qquad (i = 1, 2, \cdots, N) \qquad \cdots (23.9)$$

となる（もちろん、物理的実際に意味をもつのは実部の値である）。

今後の議論のために、

$$\Theta_\alpha = \underbrace{C_\alpha}_{\in \mathbb{C}\text{に注意}} e^{i\omega_\alpha t}, \qquad x_i = \sum_{\alpha=1}^{N} \Delta_{i\alpha} \Theta_\alpha \qquad \cdots ④$$

とおく。

(23.9) をみていてすぐに気づくことがある．それは，x_i ではなく Θ_i を座標としてギロンした方が圧倒的にやりやすいということである．というのも，④より Θ_i は明らかに方程式

$$\ddot{\Theta}_i + \omega_\alpha^2 \Theta_i = 0 \qquad (i=1,2,\cdots,N) \quad \cdots ⑤$$

をみたすからである．ここで Θ_i を基準座標という．

基準座標をうまくとることによって，運動方程式はすべて独立な⑤というきわめて単純な形にできる．これより，このときのラグランジアンは

$$L = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha \left(\dot{\Theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha^2 \right) \quad \cdots (23.12)$$

とかける（m_α は適当な定数）．さらに

$$\theta_\alpha = \sqrt{m_\alpha}\, \Theta_\alpha \qquad (i=1,\cdots,N)$$

とおくと，(23.12) は

$$L = \frac{1}{2} \sum_\alpha \left(\dot{\theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 \theta_\alpha \right)$$

となる．もちろん，(23.9)，④より

$$x_i = \sum_{\alpha=1}^{N} \Delta_{i\alpha} \frac{\theta_\alpha}{\sqrt{m_\alpha}}$$

あるいは

$$x_i = \sum_{\alpha=1}^{N} A_{i\alpha} \frac{\theta_\alpha}{\sqrt{m_\alpha}} \qquad (A_{i\alpha} \text{ は } \omega = \omega_\alpha \text{ のときの } A_i) \quad \cdots ⑥$$

として実際の座標でもこたえを求めることができる．

強制振動のとき

ラグランジアンは

$$L = \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i,k} \left(m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - k_{ik} x_i x_k \right)}_{\text{みどり項}} + \underbrace{\sum_k F_k(t)\, x_k}_{\text{オレンジ項}}$$

とかける．みどり項の部分は，これまで通り

$$\sum_{i,k} \left(m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - k_{ik} x_i x_k \right) = \frac{1}{2} \sum_\alpha \left(\dot{\theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 \theta_\alpha \right)$$

とかける．オレンジ項については，

$$\sum_k F_k(t)\,x_k = \sum_k F_k(t)\left(\sum_\alpha \Delta_{i\alpha}\frac{\Theta_\alpha}{\sqrt{m_\alpha}}\right)$$

$$= \sum_\alpha \Bigg(\underbrace{\sum_k F_k(t)\frac{\Delta_{i\alpha}}{\sqrt{m_\alpha}}}_{=f_\alpha(t)\ とおく}\Bigg)\Theta_\alpha = \sum_\alpha f_\alpha(t)\,\Theta_\alpha$$

とおけばよい。そうすれば、ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}\sum_\alpha\left(\dot{\Theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2\Theta_\alpha\right) + \sum_\alpha f_\alpha(t)\,\Theta_\alpha$$

となる。これの一般化座標 Θ_α によるラグランジュ方程式は

$$\ddot{\Theta}_\alpha + \omega_\alpha^2\Theta_\alpha = f_\alpha(t) \qquad (23.17)$$

となる。これを解析的にとく一般的方法については，まさに前節でとり上げた通りである。

xy の項が加わっているラグランジアン（$k_{ij} = \begin{pmatrix} k_0 & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & k_0 \end{pmatrix}$，$m_{ij} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$ のとき）

ラグランジアンが

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - \frac{1}{2}k_0^2(x^2+y^2) + \alpha xy \qquad \cdots ⑥$$

とかける場合について考える。

運動方程式は

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -k_0^2 x + \alpha y \\ m\ddot{y} = -k_0^2 y + \alpha x \end{cases} \qquad \cdots ⑦$$

とかける。ここに $x = A_x e^{i\omega t}$，$y = A_y e^{i\omega t}$ を代入して

$$\begin{cases} (k_0^2 - \omega^2 m)A_x = \alpha A_y \\ (k_0^2 - \omega^2 m)A_y = \alpha A_x \end{cases} \qquad \cdots ⑧$$

とかける。これより

$$\begin{pmatrix} k_0^2 - \omega^2 m & -\alpha \\ -\alpha & k_0^2 - \omega^2 m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix} = 0 \qquad \cdots ⑨$$

となるので，ω がみたすべき方程式は

$$\begin{vmatrix} k_0^2-\omega^2 m & \alpha \\ \alpha & k_0^2-\omega^2 m \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad (k_0^2-\omega^2 m)^2 = \alpha^2$$

となるので，これより，ω の2つの解は

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{m}(k_0^2-\alpha)} \quad \left(\iff \quad k_0^2-\omega_1^2 m = +\alpha \right.$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{m}(k_0^2+\alpha)} \quad \left. \iff \quad k_0^2-\omega_2^2 m = -\alpha \right)$$

に定まる．これを⑨に代入しなおして，

$$\omega=\omega_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\alpha & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \mathbb{0} \quad \therefore A_1 = A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\omega=\omega_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \mathbb{0} \quad \therefore A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}},\ A_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

（規格化した）

となる．これより，④より一般化座標

$$\Theta_1 = c_1' e^{i\omega_1 t}, \quad \Theta_2 = c_2' e^{i\omega_2 t} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{C})$$

を用いて x_1, x_2 は（虚部もふくめて）

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_1+\Theta_2) = c_1 e^{i\omega_1 t} + c_2 e^{i\omega_2 t} \qquad (Ac_1' = c_1,\ Ac_2' = c_2 \text{ とおいた})$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_1-\Theta_2) = c_1 e^{i\omega_1 t} - c_2 e^{i\omega_2 t} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{C})$$

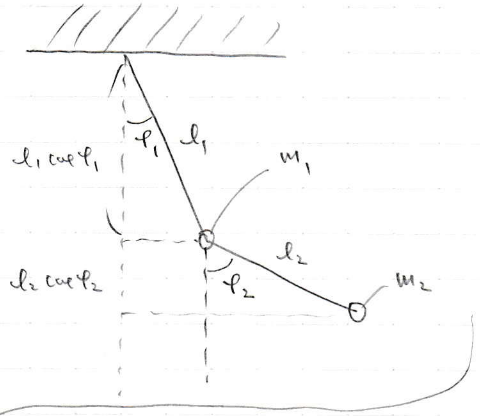
となる．もちろん，実際に物理的イミをもつのは R部のみなので，それをとりだせば x, y は

$$x = c_1 \cos(\omega_1 t+\delta_1) + c_2 \cos(\omega_2 t+\delta_2)$$

$$y = c_1 \cos(\omega_1 t+\delta_1) - c_2 \cos(\omega_2 t+\delta_2)$$

となる（適当に c_1, c_2 を定めなおしている）．

二重振り子の normal mode



位置ベクトルは

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} l_1 \sin\varphi_1 \\ -l_1\cos\varphi_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} l_1 \sin\varphi_1 + l_2\sin\varphi_2 \\ -l_1\cos\varphi_1 - l_2\cos\varphi_2 \end{pmatrix}$$

これより

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \begin{pmatrix} l_1\dot\varphi_1\cos\varphi_1 \\ l_1\dot\varphi_1\sin\varphi_1 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{r}}_2 = \begin{pmatrix} l_1\dot\varphi_1\cos\varphi_1 + l_2\dot\varphi_2\cos\varphi_2 \\ l_1\dot\varphi_1\sin\varphi_1 + l_2\dot\varphi_2\sin\varphi_2 \end{pmatrix}$$

となるので，運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2$$

$$= \frac{1}{2}m_1 l_1^2\dot\varphi_1^2 + \frac{1}{2}m_2\{l_1^2\dot\varphi_1^2 + l_2^2\dot\varphi_2^2 + l_1\dot\varphi_1 l_2\dot\varphi_2(2\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + 2\sin\varphi_1\sin\varphi_2)\}$$

$$= \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot\varphi_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot\varphi_2^2 + m_2 l_1 l_2\dot\varphi_1\dot\varphi_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)$$

である．

ポテンシャルエネルギーは

$$U = -m_1 g l_1\cos\varphi_1 - m_2 g(l_1\cos\varphi_1 + l_2\cos\varphi_2)$$

である．以上より，ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot\varphi_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot\varphi_2^2 + m_2 l_1 l_2\dot\varphi_1\dot\varphi_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)$$

$$+ (m_1+m_2)g l_1\cos\varphi_1 + m_2 g l_2\cos\varphi_2$$

である．

今回は微小振動について考えたいので，φ_1 φ_2 の2次より大きい項をすべて落とす．
すると，

$$1-\cancel{\tfrac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)^2}$$

↘ 3次以上まれじ

$$L = \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1-\varphi_2)$$

$$+ (m_1+m_2) g l_1 \underbrace{\cos\varphi_1}_{\cancel{1}-\frac{1}{2}\varphi_1^2} + m_2 g l_2 \underbrace{\cos\varphi_2}_{\cancel{1}-\frac{1}{2}\varphi_2^2}$$

ラグランジアンの定数は物理的イミをもたない

これより微小振動のラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2$$

$$-\frac{1}{2}(m_1+m_2) g l_1 \varphi_1^2 - \frac{1}{2} m_2 g l_2 \varphi_2^2$$

である。これより，ラグランジュ方程式は

$$\begin{cases} (m_1+m_2) l_1 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 + (m_1+m_2) g \varphi_1 = 0 \\ l_2 \ddot{\varphi}_2 + l_1 \ddot{\varphi}_1 + g\varphi_2 = 0 \end{cases}$$

となる。処方せんに従って $\varphi_1 = A_1 e^{i\omega t}$，$\varphi_2 = A_2 e^{i\omega t}$ とおいて，($\ddot{\varphi}_i \to -\omega^2 A_i$，$\varphi_i \to A_i$ とすればよい)，

$$\begin{pmatrix} (m_1+m_2)(g-\omega^2 l_1) & -\omega^2 m_2 l_2 \\ -\omega^2 l_1 & g-\omega^2 l_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 \qquad \cdots ①$$

となる。これの行列式をとって，

$$m_1 l_1 l_2 \omega^4 - (m_1+m_2) g (l_1+l_2)\omega^2 + (m_1+m_2) g^2 = 0$$

$$\therefore \omega_\pm^2 = \frac{g}{2m_1 l_1 l_2}\left((m_1+m_2)(l_1+l_2) \pm \sqrt{(m_1+m_2)\{(m_1+m_2)(l_1+l_2)^2 - 4m_1 l_1 l_2\}} \right)$$

となる。以上より，基準振動 (normal mode) は

$$\theta_1 = \mathrm{Re}\{c_1' e^{i\omega_+ t}\} = c_1 \cos(\omega_+ t + \delta_1) \qquad (c_1' \in \mathbb{C};\ c_1, \delta_1 \in \mathbb{R})$$

$$\theta_2 = \mathrm{Re}\{c_2' e^{i\omega_- t}\} = c_2 \cos(\omega_- t + \delta_1) \qquad (c_2' \in \mathbb{C};\ c_2, \delta_2 \in \mathbb{R})$$

である。

もちろん，求めた $\omega_\pm$ を①に代入することにより，（規格化された）$A_{1\pm}$，$A_{2\pm}$ が定まり，これによって

$$\varphi_1 = A_{1+}\Theta_1 + A_{1-}\Theta_2, \quad \varphi_2 = A_{2+}\Theta_1 + A_{2-}\Theta_2$$

とかくことができる．

とくに，$m_1 = m_2$，$l_1 = l_2$ となる場合について調べておこう．$\omega_\pm^2$ は

$$\omega_\pm^2 = \frac{g}{2ml^2}\left(4ml \pm \sqrt{2m(8ml^2 - 4ml^2)}\right)$$

$$= \frac{g}{2ml^2}\left(4ml \pm 2\sqrt{2}\,ml\right) = \frac{g}{l}\left(2 \pm \sqrt{2}\right)$$

$$\therefore\ \omega_+ = \sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega_- = \sqrt{2-\sqrt{2}}\sqrt{\frac{g}{l}} \quad \cdots ②$$

となる．また，①は

$$\begin{pmatrix} 2m(g-\omega^2 l) & -\omega^2 ml \\ -\omega^2 l & g-\omega^2 l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \cdots ③$$

となる．

たとえば，②の ω_+ を③に代入して

$$\begin{pmatrix} 2mg(1-(2+\sqrt{2})) & -g(2+\sqrt{2})m \\ -g(2+\sqrt{2}) & g(1-(2+\sqrt{2})) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{1+} \\ A_{2+} \end{pmatrix} = 0$$

となる．行列のところは行基本変形できるので

$$\therefore \begin{pmatrix} 2(-1-\sqrt{2}) & -(2+\sqrt{2}) \\ -(2+\sqrt{2}) & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{1+} \\ A_{2+} \end{pmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 2+2\sqrt{2} & 2+\sqrt{2} \\ 2+\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{1+} \\ A_{2+} \end{pmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 2+\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{1+} \\ A_{2+} \end{pmatrix} = 0$$

これより,

$$\begin{pmatrix} A_{1+} \\ A_{2+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

となる (規格化すると少し汚くなるので今回はしない). 同様にして

$$\begin{pmatrix} A_{1-} \\ A_{2-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

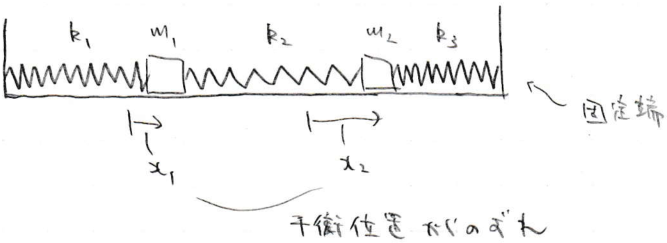
となるので, 以上から

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1+} \\ A_{2+} \end{pmatrix} \Theta_1 + \begin{pmatrix} A_{1-} \\ A_{2-} \end{pmatrix} \Theta_2$$

$$\therefore \quad \varphi_1 = \Theta_1 + \Theta_2 , \quad \varphi_2 = \sqrt{2}\left(-\Theta_1 + \Theta_2\right)$$

とわかる.

2つの原子の1次元古典模型 (益川, 畑『解析力学』第5章 より)



粒子 m_1, m_2 の平衡状態からのずれを x_1, x_2 とする.
まずは, 平衡状態について考えよう. 平衡状態におけるばね 1, 2, 3 の自然長からののびをそれぞれ a_1, a_2, a_3 とおくと, ポテンシャルは

$$U = \frac{1}{2}k_1(a_1+x_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(a_2+x_2-x_1)^2 + \frac{1}{2}k_3(a_3-x_2)^2$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}k_1 a_1^2 + \frac{1}{2}k_2 a_2^2 + \frac{1}{2}k_3 a_3^2}_{\text{みどり項}}$$

$$+ \underbrace{k_1 a_1 x_1 + k_2 a_2 (x_2 - x_1) - k_3 a_3 x_2}_{\text{オレンジ項}}$$

$$+ \frac{1}{2}k_1 x_1^2 + \frac{1}{2}k_2 (x_2-x_1)^2 + \frac{1}{2}k_3 x_2^2$$

となる。みどり項は物理的な意味をもたないので消してよい。オレンジ項については、ニュートン力学から得られる平衡状態のつり合いの条件

$$k_1 a_1 = k_2 a_2 = k_3 a_3$$

を代入すると0になる。以上よりこれらの2項は考えなくてよい。以上のことは、a_1, a_2, a_3について考える必要がなかったことを示している。

以上より、ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_2(x_2-x_1)^2 - \frac{1}{2}k_3x_2^2$$

$$= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}(k_1+k_2)x_1^2 - \frac{1}{2}(k_2+k_3)x_2^2 + k_2x_1x_2$$

となる。これは前にみたのと同じ形なので明らかにとける。運動方程式は

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1 \qquad \frac{\partial L}{\partial x_1} = -(k_1+k_2)x_1 + k_2x_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2\dot{x}_2 \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -(k_1+k_2)x_2 + k_2x_1$$

$$\therefore \begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + (k_2+k_3)x_2 - k_2x_1 = 0 \end{cases}$$

これに $x_1 = A_1e^{i\omega t}$, $x_2 = A_2e^{i\omega t}$ を代入して

$$-\omega^2m_1A_1 + (k_1+k_2)A_1 - k_2A_2 = 0$$
$$-\omega^2m_2A_2 + (k_2+k_3)A_2 - k_2A_1 = 0$$

$$\therefore \begin{pmatrix} (k_1+k_2)-\omega^2m_1 & -k_2 \\ -k_2 & (k_2+k_3)-\omega^2m_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \cdots ①$$

これより、行列式が0なので

$$\{(k_1+k_2)-\omega^2m_1\}\{(k_2+k_3)-\omega^2m_2\} - k_2^2 = 0$$

$$\therefore m_1m_2\omega^4 - \omega^2\left(m_1(k_2+k_3)+m_2(k_1+k_2)\right) + (k_1+k_2)(k_2+k_1) - k_2^2 = 0$$

$$\therefore \quad \omega^4 - \omega^2\left(\frac{k_2+k_3}{m_2} + \frac{k_1+k_2}{m_1}\right) + \frac{k_1+k_2}{m_1}\,\frac{k_2+k_3}{m_2} - \frac{k_2^2}{m_1 m_2} = 0$$

となる.以上より ω^2 の解は

$$\omega_\pm^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{k_2+k_3}{m_2} + \frac{k_1+k_2}{m_1} \pm \sqrt{\left(\frac{k_2+k_3}{m_2} + \frac{k_1+k_2}{m_1}\right)^2 - 4\left(\frac{k_1+k_2}{m_1}\,\frac{k_2+k_3}{m_2} - \frac{k_2^2}{m_1 m_2}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2+k_3}{m_2} \pm \sqrt{\left(\frac{k_1+k_2}{m_1} - \frac{k_2+k_3}{m_2}\right)^2 + \frac{4k_2^2}{m_1 m_2}}\right) \quad \cdots ②$$

となる.これによって固有ベクトルの組 $A_{1+}, A_{2+}, A_{1-}, A_{2-}$ が求まり,x_1, x_2 が決まる.

とくに $m_1 = m_2 = m$,$k_1 = k_2 = k_3 = k$ となる場合について考える。②に代入して

$$\omega_\pm^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2k}{m} + \frac{2k}{m} \pm \sqrt{0 + \frac{4k^2}{m^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4k}{m} \pm \frac{2k}{m}\right) = \frac{2k}{m} \pm \frac{k}{m}$$

$$\therefore \quad \omega_+ = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \quad \omega_- = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

となる.①は

$$\begin{pmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & 2k - \omega^2 m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \frac{2k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} - \omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

である.これより規格された係数 A は

ω_+ のとき　$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$,　$A_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

ω_- のとき　$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$,　$A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

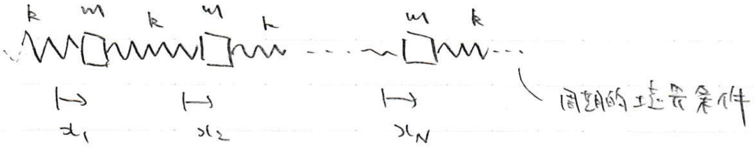
となる.以上より,求める基準振動 Θ_1, Θ_2 は

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Theta_1 + \Theta_2) \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\Theta_1 + \Theta_2) \end{cases}, \quad \begin{cases} \Theta_1 = c_1 e^{i\sqrt{\frac{3k}{m}}t} \\ \Theta_2 = c_2 e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \end{cases} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{C})$$

である.

（連成振動）

一次元のN原子固体比熱模型 （益川，畑「解析力学」第5章）



ラグランジアンは，$x_{N+1}=x_1$ として

$$L=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m\dot{x}_i^2-\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}k\left(x_i-x_{i+1}\right)^2$$

である．x_j にかんする運動方程式は

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j}=m\dot{x}_j\ ,\quad \frac{\partial L}{\partial x_j}=-\frac{1}{2}k\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(x_{j-1}-x_j\right)^2+\left(x_j-x_{j+1}\right)^2\right)$$

$$=-\frac{1}{2}k\frac{\partial}{\partial x_j}\left(-2x_{j-1}x_j+2x_j^2-2x_jx_{j+1}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}k\left(-2x_{j-1}+4x_j-2x_{j+1}\right)$$

$$=kx_{j-1}-2kx_j+kx_{j+1}$$

$$\therefore\quad m\ddot{x}_j-kx_{j-1}+2kx_j-kx_{j+1}=0\qquad (j=1,2,\cdots,N)$$

である．$x_j=A_je^{i\omega t}$ を代入して

$$-m\omega^2A_j-kA_{j-1}+2kA_j-kA_{j+1}=0\qquad (j=1,\cdots,N)\qquad \cdots ①$$

である．これを行列におこすのだが，今後のギロンのために ω,m が出る行列と k の行列に分けて，行列 A，ベクトル a を

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&&&&-1\\-1&2&-1&&&\\&-1&2&-1&&\\&&-1&2&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&-1\\-1&&&&-1&2\end{pmatrix}\ ,\quad a=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_N\end{pmatrix}$$

とおくと，① は

$$\left(kA-m\omega^2I_N\right)a=0\qquad \cdots ②$$

とかき直せる．

②は，明らかに

$$A\mathbf{a} = \frac{m\omega^2}{k}\mathbf{a} \qquad \cdots ③$$

とかいても同じである．これより，行列 A の固有値を求めれば，それによって ω とそれに対応する固有ベクトル a を求めることができる．

行列 A の固有値を求めるために，次のようなテクニックを用いる．行列 $\mathcal{S}$ を

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

と定義する．このとき任意のベクトル $\mathbf{x}$ について

$$\mathcal{S}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 0 & 1 \\ 1 & & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix}$$

なので，$\mathcal{S}$ は左からかけると行をすべて一行もち上げる．これより，

$$\underbrace{\mathcal{S}^{N-1}}_{N-1\text{ 行もち上げる}}\mathcal{S} = \mathcal{S}^N = I_N \quad , \quad \underbrace{\mathcal{S}^{N-2}}_{N-2\text{ 行もち上げる}}\mathcal{S} = \mathcal{S}^{N-1} = {}^t\mathcal{S}$$

となる．

$\mathcal{S}$ の固有値 s は次のようにしてカンタンに求められる．固有ケットを $\mathbf{b}$ とすると

$$\mathcal{S}\mathbf{b} = s\mathbf{b}$$

これに左から $\mathcal{S}^{N-1}$ をかけて

$$\underbrace{\mathcal{S}^N\mathbf{b}}_{=\ \mathbf{b}\ (\because\ \mathcal{S}^N = I_N)} = s^N\mathbf{b} \qquad \therefore\ s^N = 1 \qquad \cdots ④$$

これより，固有値 s は

$$s_n = \exp\left(\frac{2\pi i}{N} n\right) \qquad (n=1,\cdots,N)$$

の N コである．$\mathbb{S}$ の固有ベクトル $\mathbb{b}_n$ は，④より，以下の性質

$$\mathbb{b} = s_n \mathbb{S}^{N-1}\mathbb{b} = s_n {}^t\mathbb{S}\,\mathbb{b}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = s_n \begin{pmatrix} b_n \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad b_i = s_n b_{i-1} \qquad \cdots ⑤$$

を満たす．よって，⑤を用いて $b_1 = 1$ とすると

$$b_1 = 1, \quad b_l = s_n^{l-1} = \exp\left(\frac{2\pi i(l-1)n}{N}\right) \qquad \cdots ⑥$$

となる．これで $\mathbb{S}$ の固有値，固有ベクトルが求まった！（固有ベクトル $\mathbb{b}_n$ が複素数である問題については，のちに考察する．）

$\mathbb{S}$ 行列についてギロンしたところで，話を行列 A に戻そう．A は $\mathbb{S}$ を用いて

$$A = 2I_N - \mathbb{S} - \mathbb{S}^{N-1}$$

とかけるので，これより，各 s_n に対応する ω^2 は ③より

$$2 - s_n - s_n^{N-1} = \frac{m\omega_n^2}{k}$$

である．（$\mathbb{b}_n$ がそのまま A の固有ベクトルになることは明らか）．これより

$$\begin{aligned}
\omega_n^2 &= \frac{k}{m}\left(2 - s_n - s_n^{N-1}\right) \\
&= \frac{k}{m}\left(2 - s_n - s_n^{-1}\right) \qquad (\because\ s_n^N = 1) \\
&= \frac{k}{m}\left(2 - 2\cos\frac{2\pi n}{N}\right) \\
&= 4\frac{k}{m}\,\frac{1-\cos\frac{2\pi n}{N}}{2}
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \omega_n = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\left|\sin\frac{\pi n}{N}\right| \qquad (n=1,2,\cdots,N) \qquad \cdots ⑦$$

である．

⑦式をみていてすぐに気づく問題点は，⑦に $n=1,2,\cdots,N$ を入れていくと，ω_n に半分程度ダブりが見つかるということである．そのため，⑦の n の範囲は

$$\omega_n = 1,2,\cdots,\underbrace{\left[\frac{N}{2}\right]}_{\frac{N}{2}\text{を超えない最大の整数}}$$

に限れば十分である．このことは，Aの固有ベクトル $\mathbb{b}_n$ が $\mathbb{C}$ であったことにも関係している．

$$A\mathbb{b}_n = \frac{m\omega_n^2}{k}\mathbb{b}_n$$

であったが，固有値 $\frac{m\omega_n^2}{k}\in\mathbb{R}$ なので，$\mathbb{b}_n$ は実部と虚部をとりだしてもちゃんと固有ベクトルになっている．それらをそれぞれ $\mathbb{b}_n^{(r)}$, $\mathbb{b}_n^{(i)}$ とすると⑥より各成分は

$$b_{n,l}^{(r)} = \cos\left(\frac{2\pi n(l-1)}{N}\right),\quad b_{n,l}^{(i)} = \sin\left(\frac{2\pi n(l-1)}{N}\right) \qquad \cdots ⑧$$

であり，これらは明らかに線型独立である．

以上より，x_l は

$$x_l = \sum_{n=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} b_{n,l}^{(r)} Q_n^{(r)} + \sum_{n=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]-1} b_{n,l}^{(i)} Q_n^{(i)}$$

となる．基準振動は

$$Q_n^{(r)} = C_n^{(r)}\cos\left(\omega_n t + \delta_n^{(r)}\right) \qquad \left(C_n^{(r)}, C_n^{(i)}\in\mathbb{R}\right)$$

$$Q_n^{(i)} = C_n^{(i)}\sin\left(\omega_n t + \delta_n^{(i)}\right)$$

である．

（$Q_n^{(r)}$ と $Q_n^{(i)}$ で両者共に適当に位相をずらした）