§25 減衰振動

ここではまさつ力がある中での振動について考える。まさつ力は純力学的な力ではないので、ラグランジアンで考えることはできず、ニュートン力学で考えるしかない。
まさつ力が速度の一次関数でかけるとすると、運動方程式は

$$m\ddot{x} = -kx \underbrace{-\alpha\dot{x}}_{\text{まさつ力}} \qquad (\alpha\text{は定数}) \tag{25.1}$$

とかける。これより

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

としてさらに

$$\lambda = \frac{\alpha}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \tag{25.2}$$

とおくと、

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{25.3}$$

である。
解(25.3)を求めるために、(25.3)を$\mathbb{C}$に拡張して

$$\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_0^2 z = 0 \quad \leftarrow \left(\begin{array}{l}\text{これは斉次式(同次式)なので}\\ \text{解きやすい形}\end{array}\right) \quad \cdots ①$$

とする。①は線型の斉次式なので $z = Ae^{\gamma t}$ $(A, \gamma \in \mathbb{C})$ とおいて代入すると

$$\gamma^2 + 2\lambda\gamma + \omega_0^2 = 0$$

という特性方程式を得る。この解は、

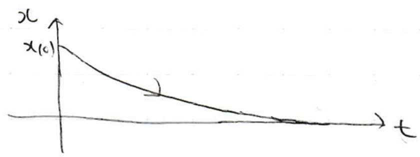
$$\gamma = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

となる。

(i) $\lambda > \omega_0$ のとき、つまり $\gamma \in \mathbb{R}$ かつ γ の解が2つ $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_1 \neq \gamma_2)$ あるとき、解はこれら2つの線型結合でかけて、

$$x(t) = z(t) = c_1 e^{\gamma_1 t} + c_2 e^{\gamma_2 t} \tag{25.6}$$

とかける。ここで $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ である。重要なのは、このとき $\gamma_1, \gamma_2 < 0$ なので(25.6)は単調な減衰を表す、ということである。
これは $\lambda > \omega_0$ よりまさつ力の方が大きいことを考えれば、当然の結果である。



(ii) $\lambda = \omega_0$ のとき，つまり $\gamma = -\lambda \in \mathbb{R}$ が1コの重解のとき 2つの解は

$$c_1 e^{-\lambda t}, \quad c_2 t e^{-\lambda t}$$

の2つあるので，これより

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\lambda t}$$

である．これも減衰のグラフを表す．

(iii) $\lambda < \omega_0$ のとき，$\gamma \in \mathbb{C}$ となる．

$$\gamma = -\lambda \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

これより

$$z(t) = c_1 e^{(-\lambda t + i\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}t)} + c_2 e^{(-\lambda t - i\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}t)} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{C})$$

となるが，$z(t) = x(t)$ となるためには

$$c_1 = c e^{i\delta}, \quad c_2 = c e^{-i\delta} \qquad (\text{つまり } c_1^* = c_2)$$

とすればよくて，これより

$$x(t) = c e^{-\lambda t}\left(e^{i\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}t + i\delta} + e^{i\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}t - i\delta}\right)$$

$$= 2c e^{-\lambda t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\,t + \delta\right)$$

となる．