§26 摩擦があるときの強制振動

前節に加えて，$F(t) = f\cos\gamma t$ をつけ加えて，運動方程式

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m}\cos\gamma t \tag{26.1}$$

を解くことを考える．

(26.1) の斉次式の一般解をすでに前節で求めたので，(26.1) の特殊解を1つ求めればよい．そこで，(26.1) を $\mathbb{C}$ に拡張して

$$\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{f}{m}e^{i\gamma t}$$

とする．そして $z = Be^{i\gamma t}$ とおいて代入すると

$$-\gamma^2 B + 2i\lambda\gamma B + \omega_0^2 B = \frac{f}{m}$$

$$\therefore\ B = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \gamma^2 + 2i\lambda\gamma)}$$

となるので，z が求まった．

実際の解は $\mathrm{Re}\,z(t)$ なので，これを求めなくてはならない．そのためには，B を $be^{i\delta}$ $(b, \delta \in \mathbb{R})$ の形で表さなくてはならない．ここで

$$b = \left|\frac{f}{m(\omega_0^2 - \gamma^2 + 2i\lambda\gamma)}\right|$$

$$= \frac{f}{m|\omega_0^2 - \gamma^2 + 2i\gamma\lambda|} = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\gamma^2\lambda^2}} \quad \cdots ①$$

である．δ を求めるためには，$\mathrm{Re}\,B$, $\mathrm{Im}\,B$ を知らねばならない．

それは，

$$b = \frac{f(\omega_0^2 - \gamma^2 - 2i\lambda\gamma)}{m(\omega_0^2 - \gamma^2 + 2i\lambda\gamma)(\omega_0^2 - \gamma^2 - 2i\lambda\gamma)}$$

とするとすぐに分かる．分母はどうせ同じ形なので，これより

$$\tan\delta = \frac{\mathrm{Im}\,B}{\mathrm{Re}\,B} = \frac{-2\gamma\lambda}{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$\therefore\ \delta = \tan^{-1}\left(\frac{2\gamma\lambda}{\gamma^2 - \omega_0^2}\right) \quad \cdots ②$$

となる．①, ② の b, δ を用いて，特殊解 $x(t)$ は

$$x(t) = b\cos(\gamma t + \delta) \quad \cdots ③$$

とかける．これに前節で求めた減衰の解をつけ加えたものが最終的な答である．
（もちろん，ω_0 と λ の大小によってつけ加える答は変わる）

十分時間がたつと，一般解のほうは0にいくので，③の解だけがのこる．