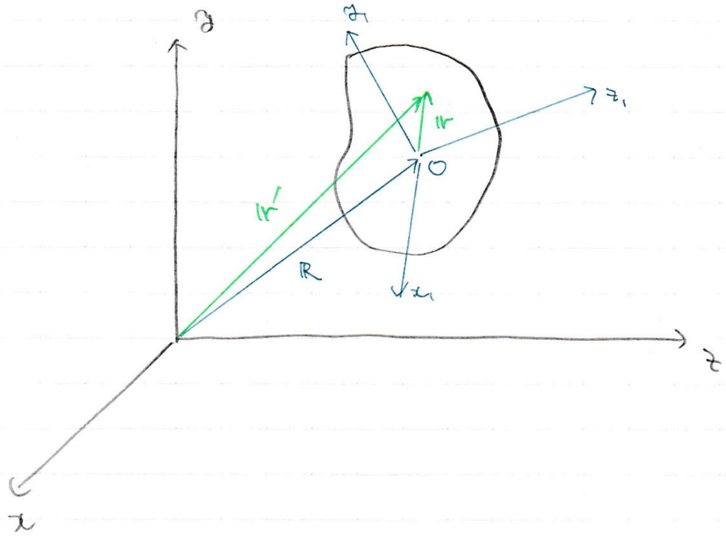
第6章 剛体

§31 角速度ベクトル

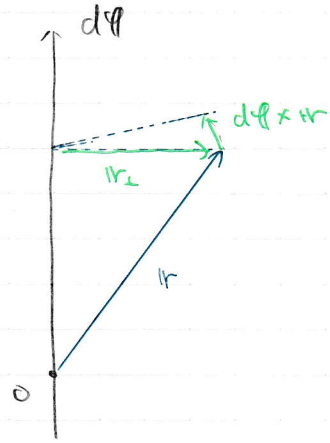
一般に剛体の自由度は位置で3つ, 回転で3つの6つの成分があり, この6つによって剛体の運動は完全に記述される. そこでまずはそのような剛体の記述法についてみていこう.



剛体にある基準点 R をとる (のちにわかるように R は慣性中心にとるのがふつうであるが, どこでもよい) このとき, 剛体内の位置 r にある部分は,

$$r' = R + r \qquad (r \text{は定ベクトルであることに注意})$$

とかける. いま, 点O (位置ベクトル R) を通るように回転軸ベクトル φ をもうけ, 剛体が dR, $d\varphi$ だけ変化したとする.



このとき, 右図より

$$dr' = dR + d\varphi \times r$$

であるから, dt で割って, これより

$$\underbrace{\frac{dr'}{dt}}_{= v} = \underbrace{\frac{dR}{dt}}_{= V} + \underbrace{\frac{d\varphi}{dt}}_{= \omega} \times r \quad \text{とおく}$$

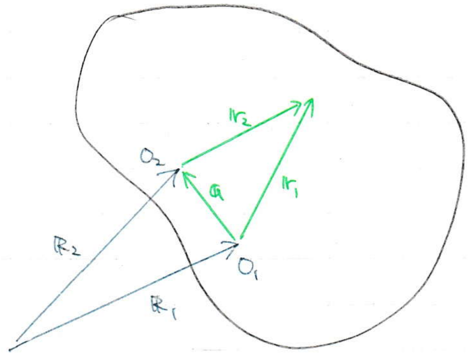
$$\therefore\ v = V + \omega \times r \qquad (31.2)$$

とかける. $\omega = \omega(t)$ を角速度ベクトルという.

角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}(t)$ の $\mathbb{R}$ 依存性

ある剛体について，2つの基準点 O_1，O_2 ($\mathbb{R}_1$，$\mathbb{R}_2$) を考えてみる．

O_1，O_2 からはかった角速度ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{\omega}_1$，$\boldsymbol{\omega}_2$ とする．このとき，(31.2) より



$$\boldsymbol{v} = \mathbb{V}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbb{r}_1 \quad \cdots\cdots ①$$

$$= \mathbb{V}_2 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbb{r}_2 \quad \cdots\cdots ②$$

でなければならない．ところで

$$\mathbb{R}_2 - \mathbb{R}_1 = \mathbb{a}$$

とおくと，

$$\mathbb{r}_1 = \mathbb{a} + \mathbb{r}_2$$

これを①に代入して

$$\boldsymbol{v} = \mathbb{V}_2 + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbb{r}_2 + \mathbb{a})$$

$$= \underbrace{\mathbb{V}_2 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbb{a}}_{= \mathbb{V}_1} + \underbrace{\boldsymbol{\omega}_2}_{= \boldsymbol{\omega}_1} \times \mathbb{r}_2$$

これより

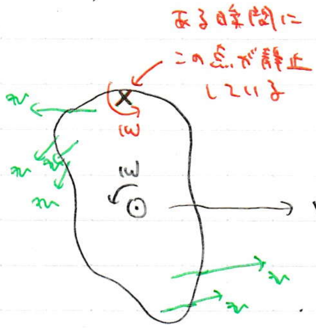
$$\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_2 \qquad (31.3)$$

である．このように，角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は基準点 O のとり方によらない．

瞬間中心

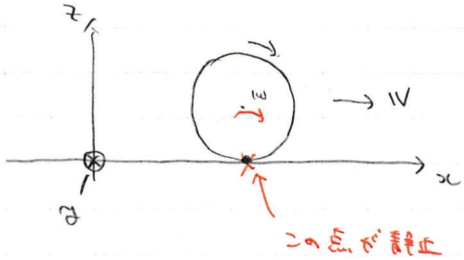
ω を求めるのが困難なとき，ω を一発で求めてしまうテクニックが存在する．これは困ったときにとても使えるテクニックである上に，検算としても十分有用であるので必ずおぼえておく．

"瞬間中心"の考え方が有用であるのは，v と ω がつねに垂直であるときである．このとき，(31.3) より v と ω は どの v でみても（つまり，v' でみても）つねに垂直である．このとき，剛体内のすべての各点はある平面上を速度 v で動いていることがわかる．



このとき，剛体は v で全体的に動きながら回転しているのだから，ある瞬間において剛体のある一部分が瞬間的に静止することがあるかもしれない．そしたら，その静止しているところで角速度を求めることにより，ω を得ることができる．

例 ころがる円柱（半径 a，一様）



右図より

$$\omega = \frac{v}{a} \text{ です}$$