§32 慣性モーメント・テンソル

剛体を十分小さな質点の集合と捉えよう。このとき、全運動エネルギーTは

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2$$

とかける。これより

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m (\mathbb{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbb{r}_i)^2 \qquad (\mathbb{V} = \dot{\mathbb{R}})$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m \mathbb{V}^2 + \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m (\boldsymbol{\omega} \times \mathbb{r}_i)^2}_{\text{オレンジ項}} + \underbrace{\sum_i m \mathbb{V} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbb{r}_i)}_{\text{みどり項}} \quad \cdots ①$$

となる。このとき

$$(\text{みどり項}) = \mathbb{V} \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \left(\sum_i m \mathbb{r}_i \right) \right)$$

となるが、慣性中心についてOをとってしまえば、この値は0となる。

オレンジ項については、

$$(\text{オレンジ項}) = \sum_i \frac{1}{2} m (\varepsilon_{ijk} \omega_j r_k \varepsilon_{imn} \omega_m r_n)$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m ((\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) \omega_j \omega_m r_k r_n)$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m (\omega_j \omega_j r_k r_k - \omega_j \omega_k r_k r_j)$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m (\omega^2 r^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{r}_i)^2) \quad \cdots ②$$

とかける。さらに②を変形して

$$② = \sum_i \frac{1}{2} m (\omega_j \omega_k \delta_{jk} r^2 - \omega_j \omega_k r_k r_j)$$

$$= \frac{1}{2} \omega_j \omega_k \underbrace{\sum_i m (\delta_{jk} r^2 - r_j r_k)}_{= I_{jk}}$$

$$= \frac{1}{2} \omega_j \omega_k I_{jk} \quad \cdots ③$$

となる。I_{jk}は慣性モーメントテンソルとよばれる。以上より①、③をあわせて

$$T = \frac{1}{2} M \mathbb{V}^2 + \frac{1}{2} \omega_j \omega_k I_{jk}$$

とかける。

慣性モーメントテンソル

$$I_{jk} = \sum_i m_i (\delta_{jk} r^2 - r_j r_k) \qquad (32.2)$$

これを行列表示でかくと,

$$I_{jk} = \begin{pmatrix} \sum m(y^2+z^2) & \sum m(-xy) & \sum m(-xz) \\ \sum m(-yx) & \sum m(x^2+z^2) & \sum m(-yz) \\ \sum m(-zx) & \sum m(-zy) & \sum m(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

である.

また, 連続体の場合は, (32.2) にかわって

$$I_{jk} = \int \rho(\mathbf{r}) (\delta_{jk} r^2 - x_j x_k) d^3\mathbf{r} \qquad (32.7)$$

とかく. $\rho(\mathbf{r})$ は密度である.

慣性モーメントテンソル I_{jk} は座標(つまり基底)をうまくとることで対角化できる. このとき T は

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2}(I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2)$$

とかける. とくに (32.7) であれば

$$I_i = \int \rho(\mathbf{r}) r^2 d^3\mathbf{r} \qquad (i = x, y, z)$$

とすればよい.

平行軸の定理

すぐにわかるように, 慣性モーメントは慣性中心を基準にしたときにもっとも最小になる(つまり, 回しやすい). このとき, 慣性中心からベクトル $\mathbf{a}$ だけはなれた $\mathbf{R}'$ ($\mathbf{R}' = \mathbf{R} + \mathbf{a}$) の慣性モーメントを I'_{ij} とすると,

$$x'_i = x_i + a_i \qquad (\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{a}_i) \qquad (\text{forall } k)$$

これより

$$I'_{ij} = \sum_k m_k (\delta_{ij} (\mathbf{r}+\mathbf{a})^2 - (x_i + a_i)(x_j + a_j))$$

$$= \underbrace{\sum_k m_k (\delta_{ij} \mathbf{r}^2 - x_i x_j)}_{= I_{ij}} + \underbrace{\sum_k m_k (2\delta_{ij} \mathbf{r}\cdot\mathbf{a} - x_i a_j - a_i x_j)}_{= 0}$$

$$+ \underbrace{\sum_k m_k}_{= M} (\delta_{ij} a^2 - a_i a_j)$$

となり,

$$\sum_k m_k \left(2\delta_{ij}\, \mathbb{r}_k \cdot \mathbb{a} - x_i^{(k)} a_j - a_i x_j^{(k)}\right)$$

$$= 2\delta_{ij}\, \mathbb{a}\cdot \underbrace{\left(\sum_k m_k \mathbb{r}_k\right)}_{=0} + a_j \underbrace{\sum_k m_k x_i^{(k)}}_{=0} + a_i \underbrace{\sum_k m_k x_j^{(k)}}_{=0}$$

$$= 0$$

となる. 以上より

$$I'_{ij} = I_{ij} + M\left(\delta_{ij} a^2 - a_i a_j\right) \qquad (32.12)$$

となる.

これはけっこう使えるので, おぼえておく. もっともよく使える場合は, I_{ij} を求めたいときに I'_{ij} を求めるほうが圧倒的にラクな場合である. このときは

$$I_{ij} = I'_{ij} - M\left(\delta_{ij} a^2 - a_i a_j\right)$$

となる. (I_{ij} が最小であることを考えれば ～ が必然的に − となることはすぐにわかる).

R が慣性中心ではない不動点 のとき

はじめにのべたように, R が慣性中心ではないときは ① の みどり項を 0 とみなすことはできない. しかし, R を慣性中心以外にとりたいときは, よくある. それは, R が不動点 のときである.

このとき, $\mathbb{V} = 0$ となるので, ① は オレンジ項しかのこらず, その結果,

$$T(\text{運動エネルギー}) = \frac{1}{2} I'_{ij} \omega_i \omega_j \qquad \cdots ①'$$

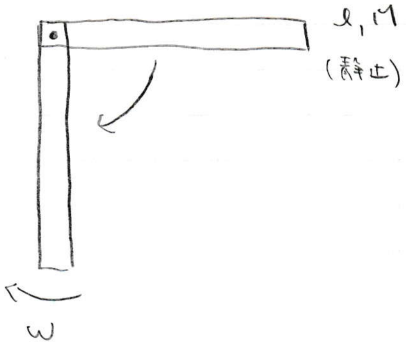
となる(ここで I'_{ij} は固定軸まわり の 慣性モーメントである). あるいは, これまで通り重心に基準をとってもよい. このとき, T は

$$T(\text{運動エネルギー}) = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j \qquad \cdots ②'$$

となる. ①' と ②' で $\mathbb{\omega}$ が共通であることに注意する! もちろんこれは (31.3) の帰結である.

もちろん, ①' と ②' の値は実際に同じでなくてはならない. このことを, 次のカンタンな例で確認する.

一様な棒をはじで回したときの角速度



真下を通るときの
(1) 運動エネルギーをωを用いて表す
(2) ωを求める.

(1) ①'を用いると

$$T = \frac{1}{2} I' \omega^2 \qquad \left(I' = \int_0^l \frac{M}{l} dx \cdot x^2 = \frac{1}{3} M l^2 \right)$$

$$= \frac{1}{6} M l^2 \omega^2 \quad \cdots ①$$

②'を用いると

$$T = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \left(V = \frac{l\omega}{2},\ \omega = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{M}{l} dx \cdot x^2 = \frac{1}{12} M l^2 \right)$$

$$= \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{24} \right) M l^2 \omega^2 = \frac{1}{6} M l^2 \omega^2 \quad \cdots ②$$

となり, ①と②が一致した! たしかに①'=②'になっている.

(2) エネルギー保存より

$$\frac{1}{6} M l^2 \omega^2 = M g \left(\frac{l}{2} \right)$$

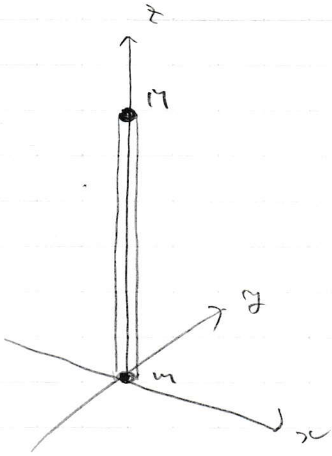
となる. 以上より

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

である.

このように, (31.3) ($\omega_1 = \omega_2$) が成り立つので 基本的には無思考で R は慣性中心にとってしまってまったく問題ない. ただ, 不動点がある場合にかぎり, そこを R にとってしまう方がラクなことがある.

長さlの2原子分子



慣性モーメントはどこを中心にとっているかによって値が異なる．点$(0,0,a)$を中心にとったときの慣性モーメントは

$$
\begin{aligned}
I_z &= 0 \\
I_x = I_y &= ma^2 + M(l-a)^2 \\
&= (m+M)a^2 - 2Mla + Ma^2 \\
&= (m+M)\left(a - \frac{Ml}{m+M}\right)^2 - \frac{M^2l^2}{m+M} + Ml^2 \\
&= (m+M)\left(a - \frac{Ml}{m+M}\right)^2 + \frac{mM}{m+M}l^2
\end{aligned}
$$

となる．以上から慣性モーメントは基準点を重心にとったとき最小で，その値は

$$I_x = I_y = \frac{mM}{m+M}l^2$$

であることが分かる．これは重心を基準にした方が棒が"もっとも回しやすい"という物理的直感にも合っている．

別解　mを中心とした慣性モーメントを用いたあと，(32.12)を用いる．

$$
\begin{cases}
I_{0z} = 0 \\
I_{0x} = I_{0y} = Ml^2
\end{cases}
$$

これより(32.12)を用いて

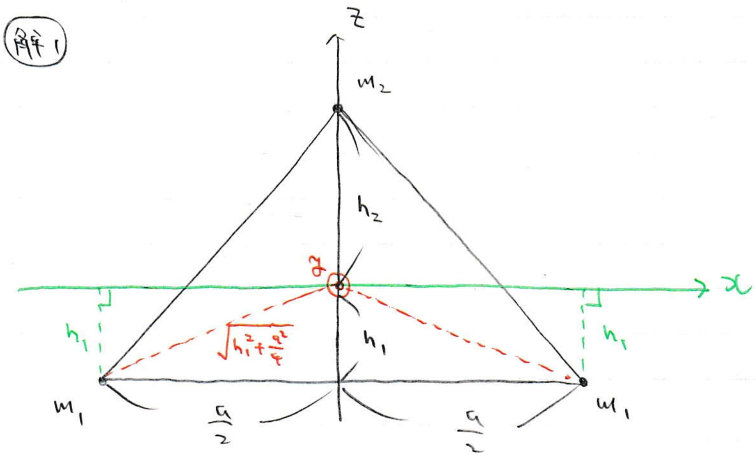
$$I_z = 0 + 0 = 0$$

$$
\begin{aligned}
I_x = I_y &= Ml^2 - (m+M)\left(\left(\frac{M}{m+M}l\right)^2 + 0^2\right) \\
&= \frac{mM}{m+M}l^2
\end{aligned}
$$

である．

H_2O型の3原子分子

解1



$$h_1 = \frac{m_2}{2m_1+m_2}h$$

$$h_2 = \frac{2m_1}{2m_1+m_2}h$$

図から

$$I_x = 2m_1h_1^2 + m_2h_2^2 = 2m_1\left(\frac{m_2}{2m_1+m_2}h\right)^2 + m_2\left(\frac{2m_1}{2m_1+m_2}h\right)^2$$

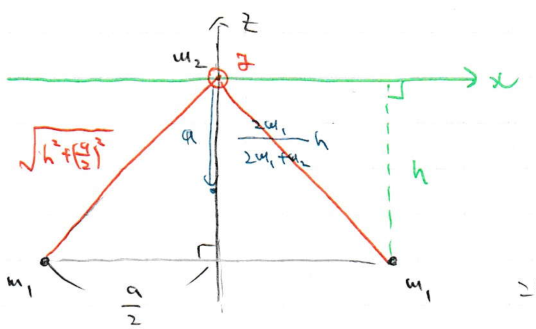
$$= \frac{2m_1m_2^2}{(2m_1+m_2)^2}h^2 + \frac{4m_1^2m_2}{(2m_1+m_2)^2}h^2$$

$$= \frac{2m_1m_2(m_2+2m_1)}{(2m_1+m_2)^2}h^2 = \underline{\frac{2m_1m_2}{2m_1+m_2}h^2}$$

$$I_z = 2m_1\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \underline{\frac{1}{2}m_1a^2}$$

$$I_y = 2m_1\left(h_1^2+\frac{a^2}{4}\right) + m_2h_2^2 = I_x + I_z = \underline{\frac{2m_1m_2}{2m_1+m_2}h^2 + \frac{1}{2}m_1a^2}$$

解2 頂点を基準にして I' を求める.



$$I_x' = 2m_1h^2$$

$$I_y' = 2m_1\left(h^2+\frac{a^2}{4}\right)$$

$$I_z' = 2m_1\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}m_1a^2$$

これを

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_z \end{pmatrix}, \quad a_z = \frac{2m_1}{2m_1+m_2}h$$

だけずらせばよい.

以上より

$$I_x = 2m_1h^2 - (2m_1+m_2)a_z^2$$

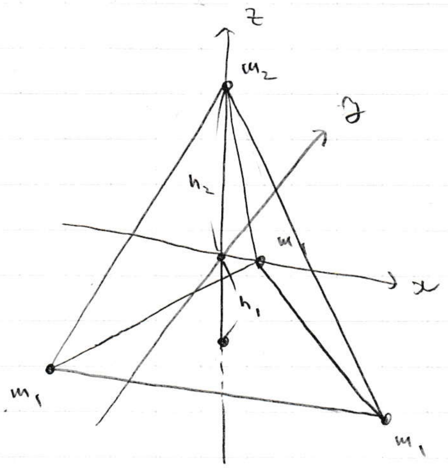
$$= \frac{4m_1^2+2m_1m_2}{2m_1+m_2}h^2 - \frac{4m_1^2}{2m_1+m_2}h^2 = \frac{2m_1m_2}{2m_1+m_2}h^2$$

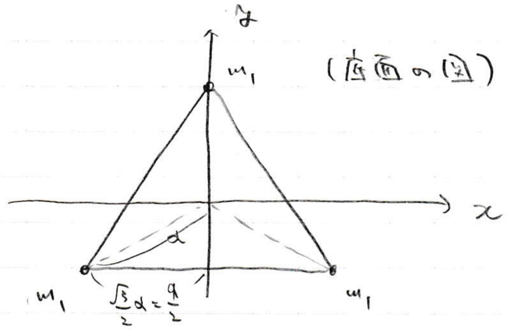
$$I_z = I_z' - 0 = \frac{1}{2}m_1a^2$$

$$I_y = I_y' - (2m_1+m_2)a_z^2 = I_x + I_z = \frac{2m_1m_2}{2m_1+m_2}h^2 + \frac{1}{2}m_1a^2$$

です.

正三角錐による4原子分子





$$h_1 = \frac{m_2}{3m_1+m_2}h, \quad h_2 = \frac{3m_1}{3m_1+m_2}h$$

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

これより

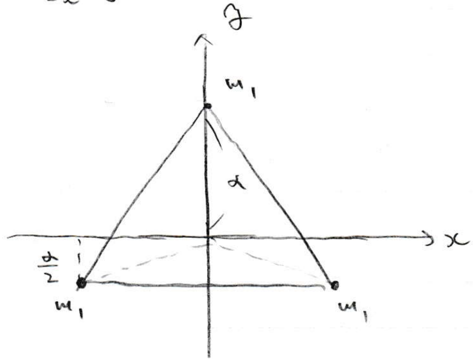
$$I_y = 2m_1\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_1^2\right) + m_1h_1^2 + m_2h_2^2$$

$$= 3m_1\left(\frac{m_2}{3m_1+m_2}h\right)^2 + m_2\left(\frac{3m_1}{3m_1+m_2}\right)^2 + 2m_1\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$= \frac{3m_1m_2(m_2+3m_1)}{(3m_1+m_2)^2}h^2 + \frac{1}{2}m_1a^2$$

$$= \frac{3m_1m_2}{3m_1+m_2}h^2 + \frac{1}{2}m_1a^2$$

I_x は



$$I_x = 2m_1\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_1^2\right) + m_1\left(a^2 + h_1^2\right) + m_2 h_2^2$$

$$= 3m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2 + m_1 a^2\left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \underline{\frac{3m_1 m_2}{3m_1 + m_2} h^2 + \frac{1}{2} m_1 a^2 = I_y}$$

I_z は

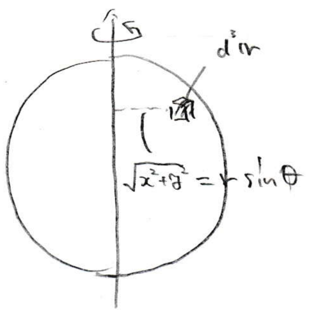
$$I_z = 0 + 3m_1 a^2 = \underline{m_1 a^2}$$

である。

（平行軸の定理を用いる方法は上のやり方と方針が同じでありあまりメリットがない。よってここでは行わない）

半径Rの球

解1



明らかに $I_x = I_y = I_z$ である。

また左図より微小部分 d^3r がもつ慣性モーメントは

$$\frac{M\,d^3r}{\frac{4}{3}\pi R^3} \times (r\sin\theta)^2$$

これより積分して

$$I = \int \frac{M\,d^3r}{\frac{4}{3}\pi R^3}(r\sin\theta)^2$$

$$= \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} r^2 \sin^2\theta$$

$$= \frac{2\pi M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int_0^R r^4 dr \int_{-1}^{1} (1-\mu^2)\, d\mu \quad (\mu = \cos\theta \text{とおいた})$$

$$= \frac{3M}{2R^3}\left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^R \left[\mu - \frac{1}{3}\mu^3\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{3M}{2R^3}\frac{1}{5}R^5 \underbrace{\left(1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)\right)}_{=\frac{4}{3}} = \underline{\frac{2}{5}MR^2}$$

である。

(解2) $I_x = \int_{全球} (y^2+z^2)\rho\, d^3\mathbf{r}$

$I_y = \int_{全球} (x^2+z^2)\rho\, d^3\mathbf{r}$

$I_z = \int_{全球} (x^2+y^2)\rho\, d^3\mathbf{r}$

これより

$$I_x + I_y + I_z = 2\int_{全球} \rho r^2 d\mathbf{r}$$

$$= 8\pi\rho \int_0^R r^4 dr \quad \left(\because \int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d\mu = 4\pi\right)$$

$$= 8\pi\rho \frac{1}{5} R^5$$

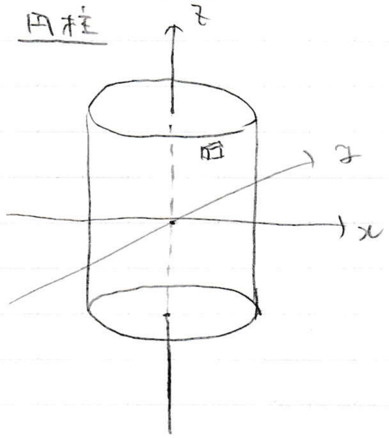
$$= \frac{\overset{2}{\cancel{8\pi}}}{5} R^5 \times \frac{M}{\frac{\cancel{4}}{3}\cancel{\pi} R^3} = \frac{6}{5} M R^2$$

となる. $I_x = I_y = I_z$ なので以上より

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} M R^2$$

である.

円柱



明らかに $I_x = I_y$

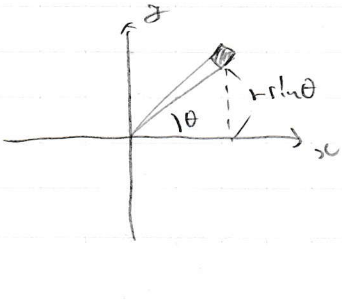
円柱座標を用いて

$$I_z = \int \frac{Mr^2}{\pi R^2 h} d^3\mathbf{r}$$

$$= \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r\,dr \frac{Mr^2}{\pi R^2 h}$$

$$= 2\cancel{\pi}\cancel{h} \frac{M}{\cancel{\pi} R^2 \cancel{h}} \left[\frac{1}{4} r^4\right]_0^R$$

$$= \frac{2M}{\cancel{R^2}} \frac{1}{4} R^{\cancel{4}\,2} = \frac{1}{2} M R^2$$



また, 右図より

$$I_x = \int \frac{M}{\pi R^2 h} \left\{ (r\sin\theta)^2 + z^2 \right\} d^3\mathbf{r}$$

$$I_x = \frac{M}{\pi R^2 h}\int \left(r^2\sin^2\theta + z^2 \right) d^3r$$

$$= \frac{M}{\pi R^2 h}\left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r\,dr\, r^2 \sin^2\theta + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r\,dr\, z^2 \right)$$

$$= \frac{M}{\pi R^2 h}\left(h \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta \int_0^R r^3 dr + 2\pi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz \int_0^R r\,dr \right)$$

$$= \frac{M}{\pi R^2 h}\left(\frac{h}{2}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta \right]_0^{2\pi} \frac{1}{4}R^4 + 2\pi \frac{1}{3}\frac{h^3}{4}\frac{1}{2}R^2 \right)$$

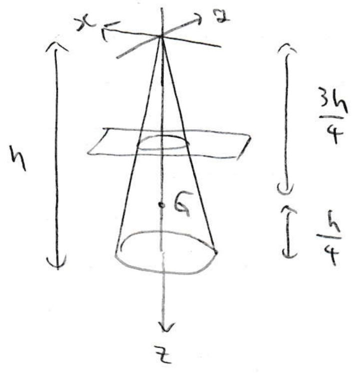
$$= \frac{M}{\cancel{\pi}\cancel{R^2}\cancel{h}}\left(\cancel{\frac{h}{2}}\cancel{2\pi}\frac{1}{4}\cancel{R^4}^{R^2} + \cancel{2\pi}\frac{1}{24}\cancel{h^3}^{h^2}\cancel{R^2} \right)$$

$$= M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{1}{12}h^2 \right)$$

となる. I_y もこれと同じである.

<u>高さh, 底面半径Rの円錐</u>

まず, 正n角錐 ($n\to\infty$ のときは円すい) の重心は, 上から$\frac{3}{4}h$ (底面から$\frac{h}{4}$) のところにあることを示す.



まず, 正n角錐が対称こまであることは明らかである. このとき対称じくがz軸になるように左図のように座標をとる.

このとき xy平面で角錐を切ったときの断面積は z^2 に比例して az^2 (aはnによってきまる定数) とかける.

これより角錐の体積Vは

$$V = \int_{内} d^3r = \int_0^h az^2 dz = \frac{1}{3}ah^3 \quad \cdots ①$$

とかける.

(底面積が ah^2 なので, ①は

$$V = \frac{1}{3}\times(底面積)\times(高さ)$$

であることと同じである.)

さて，角錐の慣性中心は

$$\mathbb{R} = \frac{1}{M}\int_{内} \rho(\mathbf{r})\,\mathbf{r}\, d^3\mathbf{r} \quad \left(= \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}\right)$$

とかける．いまは $\rho(\mathbf{r}) = M/\frac{1}{3}ah^3$ なので代入してこれより

$$\mathbb{R} = \frac{1}{\frac{1}{3}ah^3}\int_{内} \mathbf{r}\, d^3\mathbf{r} \quad \cdots ②$$

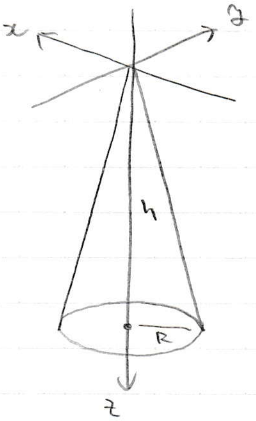
とかける．②のz方向だけ求めたいので以上より

$$R_z = \frac{3}{ah^3}\int_{内} z\, d^3\mathbf{r}$$

$$= \frac{3}{ah^3}\int_0^h z\, a z^2\, dz = \frac{3}{ah^3}\frac{ah^4}{4} = \frac{3}{4}h$$

とかける（これは常識としておく）．

さて，慣性モーメントを求める．まずは左図における I' を求める．



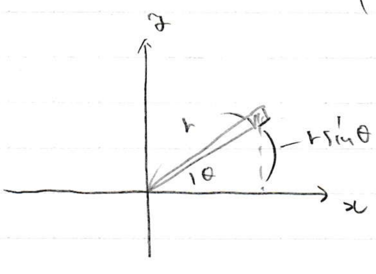
$$I'_z = \frac{M}{\frac{1}{3}\pi R^2 h}\int r^2\, d^3\mathbf{r}$$

$$= \frac{3M}{\pi R^2 h}\int_0^h dz\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\frac{R}{h}z} r\,dr\, r^2$$

$$= \frac{6M}{R^2 h}\int_0^h dz\, \frac{1}{4}\left(\frac{R}{h}z\right)^4$$

$$= \frac{3M}{2R^2h}\left(\frac{R}{h}\right)^4 \frac{1}{5}h^5 = \frac{3}{10}MR^2$$

（積分範囲に注意！先にxyについて積分し，さいごにzについて積分する必要がある．）



$$I_x = \frac{M}{\frac{1}{3}\pi R^2 h}\int \left(r^2\sin^2\theta + z^2\right) d^3\mathbf{r}$$

$$= \cdots = \frac{3}{20}MR^2 + \frac{3}{5}Mh^2$$

（積分はややめんどいが，やることは単純）

I_y も同じ

これより

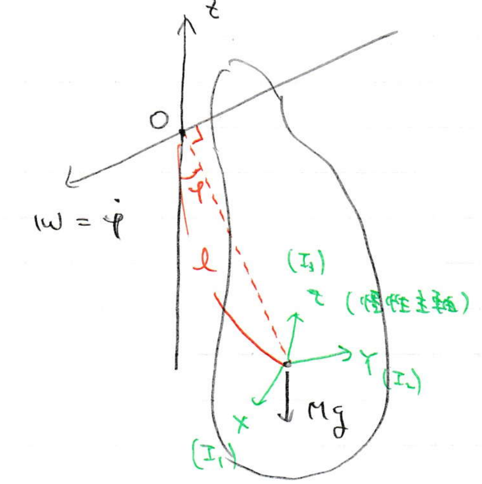
$$I_x = \frac{3}{20}MR^2 + \frac{3}{5}Mh^2 - M\left(\frac{3h}{4}\right)^2$$

$$= \frac{3}{20}MR^2 + \frac{3}{20}\frac{1}{4}Mh^2 = \underline{\frac{3}{20}M\left(R^2+\frac{h^2}{4}\right)}$$ （I_yも同じ）

$$I_z = I_z' - 0 = \underline{\frac{3}{10}MR^2}$$

である．

物理振子（微小なふれ）



(34.9) を暗に用いる．力のモーメント $\mathbb{N}$ は

$$\mathbb{N} = \sum_i \mathbb{r}_i \times \mathbb{f}_i = \sum_i \mathbb{r}_i \times m_i \mathbb{g}$$

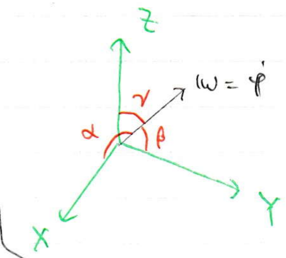
とかけるので，これより

$$\mathbb{N} = \underbrace{\frac{\sum_i m_i \mathbb{r}_i}{\sum_i m_i}}_{=\mathbb{R}\text{（慣性中心）}} \times \left(\sum_i m_i \mathbb{g}\right)$$

$$= M\mathbb{R} \times \mathbb{g}$$

である．つまり，慣性中心に Mg の重力がかかっているとみなして $\mathbb{N}$ を求めても同じである．

このとき，$\boldsymbol{\omega}$ と $\mathbb{e}_X, \mathbb{e}_Y, \mathbb{e}_Z$ のなす角を α, β, γ とすると



$$T = (\text{重心K.E}) + (\text{回転K.E})$$

$$= \frac{1}{2}M(l\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}I_1(\dot{\varphi}\cos\alpha)^2 + \frac{1}{2}I_2(\dot{\varphi}\cos\beta)^2 + \frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi}\cos\gamma)^2$$

ポテンシャルエネルギーについても (34.9)' を用いて重心だけ考えればよくて

$$U = -Mgy = -Mgl(1-\cos\varphi) \sim -Mgl\frac{\varphi^2}{2}$$

とすればよい

以上より、ラグランジアンは φが微小のとき

$$L = \frac{1}{2}M(l\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}(I_1\cos^2\alpha + I_2\cos^2\beta + I_3\cos^2\gamma)\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}Mgl\varphi^2$$

とかける。これより、角振動数 ω は

$$\omega^2 = \frac{Mgl}{Ml^2 + I_1\cos^2\alpha + I_2\cos^2\beta + I_3\cos^2\gamma}$$

とかける。

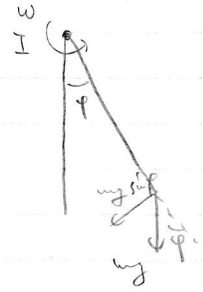
もっともカンタンなのは、X, Y, Z が x, y, z に一致するときである。このとき、$\omega \parallel e_y$ とすると $\cos\alpha = \cos\gamma = 0$, $\cos\beta = 1$, $I_2 = I$ とすればよい。このとき ω は

$$\omega = \frac{Mgl}{Ml^2 + I} \quad \cdots ①$$

となる。もちろん、これは慣性モーメントの基準点を固定点Oにしても求めることができる。このとき、慣性モーメントを I' とすると

回転の運動方程式は

$$I'\ddot{\varphi} = -Mgl\sin\varphi \simeq -Mgl\varphi \quad (\text{微小のとき})$$



これより

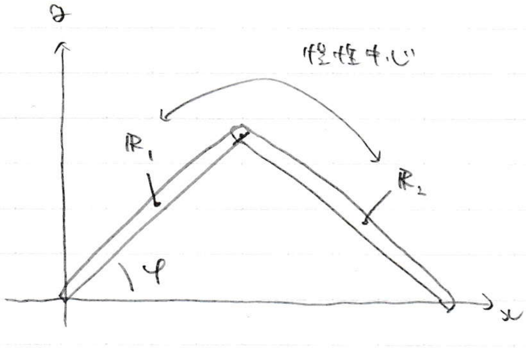
$$\omega = \frac{Mgl}{I'} \quad \cdots ②$$

となる。①, ② より

$$I' = I + Ml^2$$

が示せる。これは平行軸の定理そのものである。

剛体の運動エネルギー (P.129)



計算するだけ。

$$R_1 = \begin{pmatrix} \frac{l}{2}\cos\varphi \\ \frac{l}{2}\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} \frac{3l}{2}\cos\varphi \\ \frac{l}{2}\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\therefore V_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}l\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \frac{l}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3l}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \frac{l}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi \end{pmatrix}$$

これより

$$T = \frac{1}{2}MV_1^2 + \frac{1}{2}MV_2^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{3}(1+3\sin^2\varphi)Ml^2\dot{\varphi}^2$$

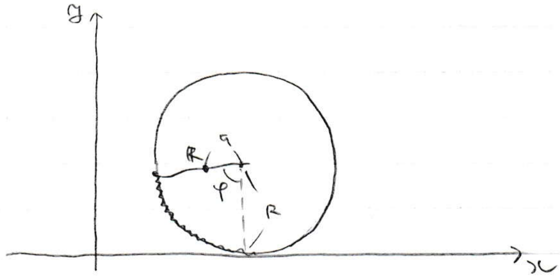
$\left(I = \frac{1}{12}Ml^2 \text{ を用いた}\right)$

ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{3}\left(1+3\sin^2\varphi\right) M l^2 \dot{\varphi}^2 - 2Mgl\sin\varphi$$

となる.

重心がずれている円柱の運動エネルギー



慣性中心$\mathbb{R}$が円の中心の真下にきたときをφ=0とする.

左図より

$$\mathbb{R} = \begin{pmatrix} R\varphi - a\sin\varphi \\ R - a\cos\varphi \end{pmatrix}$$

以上より

$$\mathbb{V} = \dot{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} R\dot{\varphi} - a\dot{\varphi}\cos\varphi \\ a\dot{\varphi}\sin\varphi \end{pmatrix}$$

これより, ラグランジアンは

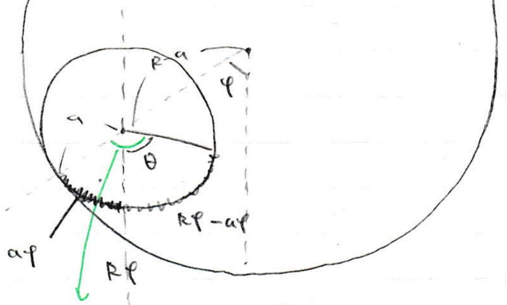
$$L = \frac{1}{2}M\mathbb{V}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 - mga(1-\cos\varphi)$$

$$= \frac{1}{2}M\left\{(R\dot{\varphi} - a\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 + a^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi\right\} + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 - mga(1-\cos\varphi)$$

$$= \underline{\frac{1}{2}M(R^2 - 2aR\cos\varphi + a^2)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 - mga(1-\cos\varphi)}$$

である.

半径Rの円柱の内側をころがる半径aの円柱



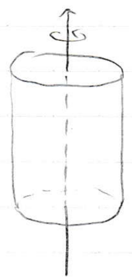
右図より

$$V = (R-a)\dot{\varphi}$$

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{(R-a)}{a}\dot{\varphi}$$

これをθとしないように注意!
あくまで"重心まわりの"回転にすぎない

ところで、質量M，半径aの円柱の軸まわりの慣性モーメントは



$$I_z = \int_0^l dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{M}{\pi a^2 l} r^2 r\,dr$$

$$= 2\pi l \frac{M}{\pi a^2 l} \frac{1}{4} a^4 = \frac{1}{2} M a^2$$

となるので、以上よりラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2} M (R-a)^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} M a^2\right) \frac{(R-a)^2}{a^2} \dot{\varphi}^2 - Mg(R-a)(1-\cos\varphi)$$

$$= \frac{3}{4} M (R-a)^2 \dot{\varphi}^2 - Mg(R-a)(1-\cos\varphi)$$

となる。とくに、φが微小なときは

$$L \approx \frac{3}{4} M (R-a)^2 \dot{\varphi}^2 - Mg(R-a)\frac{\varphi^2}{2}$$

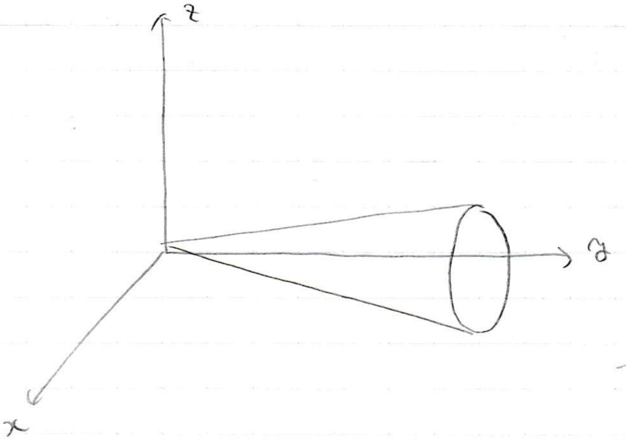
となるので、これより、

$$\omega^2 = \frac{\frac{3}{2} M (R-a)^2}{Mg(R-a)} = \frac{3}{2g}(R-a)$$

$$\therefore\ T(周期) = 2\pi \sqrt{\frac{2g}{3(R-a)}}$$

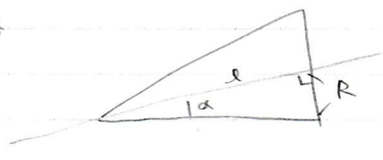
である。

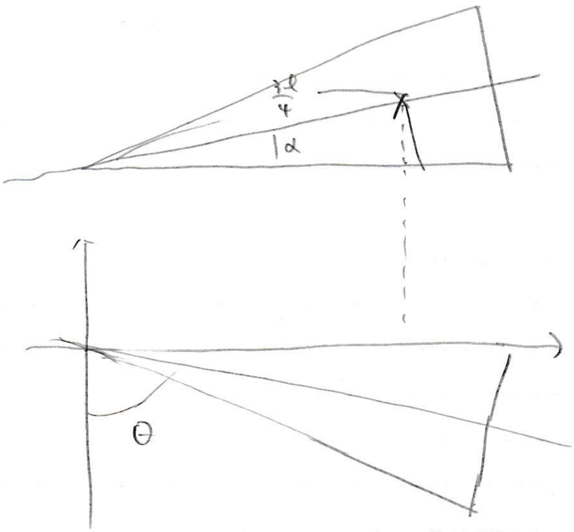
先端を固定された転がる円錐



円錐の頂角を2αとすると

$$\tan\alpha = \frac{R}{l}$$





右図より重心速度は

$$V = \frac{3l}{4}\cos\alpha\cdot\dot{\theta}$$

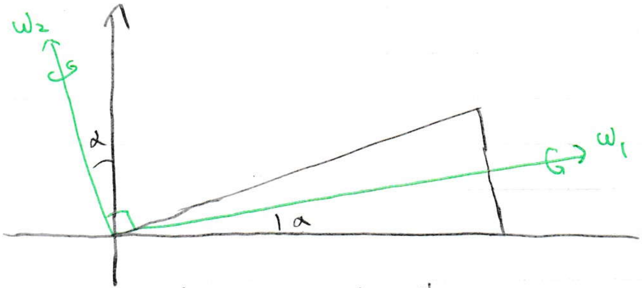
である

角速度ベクトルは，瞬間中心を考えると ω は $\overrightarrow{OA}$ 方向で

$$\omega = \frac{\frac{3l}{4}\cos\alpha\cdot\dot{\theta}}{\frac{3l}{4}\sin\alpha} = \frac{\dot{\theta}}{\tan\alpha}$$

となる．

円すいの $\overrightarrow{OA}$ 方向の慣性モーメントを求めるのは難しいので，ω を別の2つの方向に分ける．一方は円錐の軸方向，およびもう一方は $\overrightarrow{OA}$ および円錐の軸がなす平面内にあり，円錐軸に垂直な方向にとる（それぞれの ω を ω_1, ω_2 とする）



このとき

$$\omega_1 = \frac{\dot{\theta}}{\tan\alpha}\cos\alpha = \frac{\dot{\theta}\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\omega_2 = -\frac{\dot{\theta}}{\tan\alpha}\sin\alpha = -\dot{\theta}\cos\alpha$$

以上より求める運動エネルギーTは

$$T = \frac{1}{2}M\left(\frac{3l}{4}\cos\alpha\cdot\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{3}{20}M\left(R^2+\frac{l^2}{4}\right)\dot{\theta}^2\cos^2\alpha + \frac{1}{2}\frac{3}{10}MR^2\dot{\theta}^2\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$R = \tan\theta\cdot l$ を入れる

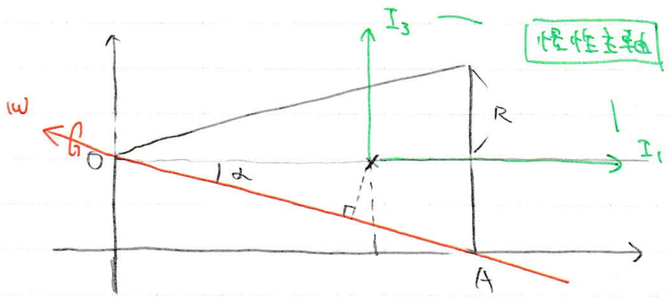
$$= \frac{9}{32}Ml^2\dot{\theta}^2\cos\alpha + \frac{3}{40}Ml^2\dot{\theta}^2\sin^2\alpha + \frac{3}{160}Ml^2\dot{\theta}^2\cos^2\alpha + \frac{3}{20}Ml^2\dot{\theta}^2\cos^2\alpha$$

$$= Ml^2\dot{\theta}^2\left(\frac{9}{32}\cos\alpha + \frac{3}{80}\sin^2\alpha + \frac{3}{160}\cos^2\alpha + \frac{3}{20}\cos^2\alpha\right)$$

$$= Ml^2\dot{\theta}^2\left(\frac{3}{40} + \frac{3}{8}\cos^2\alpha\right)$$

である．

円錐の先端の高さがRのとき



$\tan\alpha = \dfrac{R}{l}$

・重心速度 $V = \dfrac{3l}{4}\dot{\theta}$

ω は $\overrightarrow{AO}$ 方向，$\omega = \dfrac{V}{\frac{3l}{4}\sin\alpha} = \dfrac{\dot{\theta}}{\sin\alpha}$

よって みどりのように慣性主軸をとると

$$\omega_1 = \omega\cos\alpha = \dot{\theta}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \omega_2 = \omega\sin\alpha = \dot{\theta}$$

以上より

$$T = \frac{1}{2}M\left(\frac{3l}{4}\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{10}MR^2\right)\frac{\dot{\theta}^2}{\sin^2\alpha}\cos^2\alpha + \frac{1}{2}\frac{3}{20}M\left(R^2+\frac{l^2}{4}\right)\dot{\theta}^2$$

$$= \left(\frac{9}{32}+\frac{3}{20}+\frac{3}{160}+\frac{3}{40}\tan^2\alpha\right)Ml^2\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{3}{40}\left(5+\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)Ml^2\dot{\theta}^2$$

である．