§33 剛体の角運動量

角運動量は当然のことながら基準のえらび方によってその値は大きく異なる。角運動量の中心を慣性中心にとることにしよう。すると，各質点がそこを基準としてもつ速度は $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ とかけるので，これより

$$\boldsymbol{M} = \sum m\,\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}) \quad \cdots ①$$

である。ここで

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}))_i &= \varepsilon_{ijk} r_j \varepsilon_{kmn} \omega_m r_n \\ &= (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}) r_j \omega_m r_n \\ &= r_j \omega_i r_j - r_j \omega_j r_i \\ &\left(= r^2\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\omega}) \right)\end{aligned}$$

となるので，以上より，①に代入して

$$M_i = \sum m(r^2\omega_i - r_i r_j \omega_j) = \omega_j \underbrace{\sum m(r^2\delta_{ij} - r_i r_j)}_{= I_{ij}}$$

となる。以上より

$$M_i = I_{ij}\omega_j \quad (33.1)$$

あるいは

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (33.1)'$$

である。とくに，I_{ij} が対角化されるように基底をとると

$$M_1 = I_1\omega_1, \quad M_2 = I_2\omega_2, \quad M_3 = I_3\omega_3$$

となる。

球状こまの場合

すべての慣性モーメントがひとしい $(I_1 = I_2 = I_3 = I)$ ので，

$$\boldsymbol{M} = I\boldsymbol{\omega}$$

とかける。

外力のない剛体の場合

このとき，全運動量 $\mathbb{P}$，全角運動量 $\mathbb{M}$ が保存する．$\mathbb{P}$ の保存は当然ながら並進運動をもたらすだけである．

とくに，球状こま（$I_1=I_2=I_3$）にたいしては，たんに $\omega=$（一定）をいみする．

回転子（つまり $I_3=0$，$I_1=I_2$ の棒状のもの）の場合は，ω は z 成分をもたないので，ω は必ずそれに垂直になる．

対称こま（$I_1=I_2$）の場合は，保存されるベクトル $\mathbb{M}$ にうまく x_2 を直交させることによって，$\omega_2=0$ にできる．このとき $\mathbb{M}$ と ω は x_1，x_3 成分のみもつのでその平面内にあり，剛体中の各点は速度

$$v = \omega \times r \perp \omega$$

で運動している．つまり x_1，x_3 面につねに垂直に動いている．

（こまの動きの一般論は §35 でくわしく行う）