§34 剛体の運動方程式

剛体を構成する粒子 $\mathbf{r}_i$, m_i $(i=1,\cdots,N)$ の全運動量 $\mathbf{P}$ は

$$\mathbf{P} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i = M\mathbf{V} \quad \cdots ①$$

とかける。ただし

$$M = \sum_i m_i \quad : \text{剛体の全質量}$$

$$\mathbf{V} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \mathbf{r}_i = \dot{\mathbf{R}} \quad : \text{重心速度}(\mathbf{R}\text{は慣性中心})$$

である。これより、各質点にはたらく力は

$$\mathbf{f}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$$

とかけるので、これより ①より

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_i \mathbf{f}_i = \mathbf{F} \qquad \left(\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{f}_i : \text{剛体にはたらく全力}\right) \quad (34.1)$$

である。

剛体のポテンシャルエネルギーを $U(\mathbf{R}, \varphi)$ とおく。このとき、剛体が $\delta\mathbf{R}$ だけ並進したときの U の変化 δU は

$$\delta U = \sum_i \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}\delta\mathbf{r}_i = \sum_i (-\mathbf{f}_i)\delta\mathbf{R} = -\mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{R}$$

これより

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}}$$

とかける。すなわち、剛体に加わる全外力は、慣性中心におけるポテンシャルの grad をとればよい！

次に角運動量について考える。角運動量 $\mathbf{M}$ は $\mathbf{R}$ を原点として

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i' \times \mathbf{p}_i' \qquad (\mathbf{r}_i \neq \mathbf{r}_i',\ \mathbf{p}_i \neq \mathbf{p}_i' = m_i \mathbf{w}_i \times \mathbf{r}_i)$$

O基準　　R基準

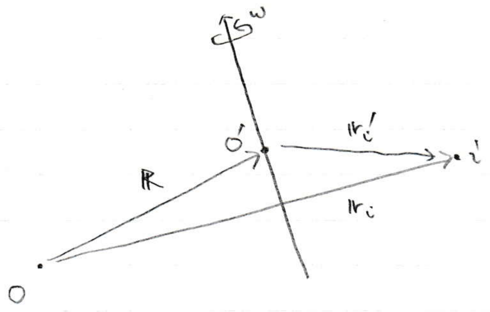
とかける。このとき

$$\dot{\mathbf{M}} = \underbrace{\sum_i \dot{\mathbf{r}}_i' \times \mathbf{p}_i'}_{=0} + \sum_i \mathbf{r}_i' \times \dot{\mathbf{p}}_i' \quad \cdots ②$$

となる。ここで

$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}_i'$ に m_i をかけて微分すると

$$m_i \dot{\mathbf{r}}_i = m_i \mathbf{V} + m_i \dot{\mathbf{r}}_i'$$



となり，これより

$$\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{V} + \mathbf{p}_i'$$

となる．さらにこれを微分して

$$\mathbf{f}_i = m_i \dot{\mathbf{V}} + \dot{\mathbf{p}}_i'$$

これを②に代入して

$$\dot{\mathbf{M}} = \sum_i \mathbf{r}_i' \times (\mathbf{f}_i - m_i \dot{\mathbf{V}})$$

$$= \sum_i \mathbf{r}_i' \times \mathbf{f}_i - \underbrace{\sum_i m_i \mathbf{r}_i' \times \dot{\mathbf{V}}}_{=0}$$

以上より，力のモーメント $\mathbf{N}$ を

$$\mathbf{N} = \sum_i \mathbf{r}_i' \times \mathbf{f}_i \qquad (34.4)$$

とおくことにより

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{N} \qquad (34.3)$$

となる．

剛体が無限小の角度 $\delta\boldsymbol{\varphi}$ だけ変化したときのポテンシャルエネルギー $U(\mathbf{R}, \boldsymbol{\varphi})$ の変化は

$$\delta U = -\sum_i \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \delta \mathbf{r}_i = -\sum_i \mathbf{f}_i \cdot (\delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_i) = -\sum_i \delta\boldsymbol{\varphi} \cdot (\mathbf{r}_i' \times \mathbf{f}_i)$$

$$= -\delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \left(\sum_i \mathbf{r}_i' \times \mathbf{f}_i\right) = -\delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{N}$$

となる．以上より

$$-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{N}$$

となる．

剛体のラグランジアン

以前にものべたように剛体のラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2} m \mathbb{V}^2 + \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j - U(\mathbb{R}, \varphi)$$

とかける。このとき

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbb{V}}\right) = m\dot{\mathbb{V}}, \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbb{R}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbb{R}} = \mathbb{F}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \omega_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(I_{ij}\omega_j\right) = \frac{dM_i}{dt} \qquad \therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \omega}\right) = \frac{d\mathbb{M}}{dt}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \mathbb{N}$$

とかけるので，以上より，(34.1)，(34.3) をもちいて

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \mathbb{V}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \mathbb{R}} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \omega}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$

となる。これはまさに自由度6のラグランジュ方程式そのものである。

一様な電場中の剛体

質点 i がうける力 $\mathbb{f}_i$ は $\mathbb{f}_i = e_i \mathbb{E}$ とかける。これより力のモーメント $\mathbb{N}$ は

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \sum_i \mathbb{r}_i \times \mathbb{f}_i \\ &= \sum_i \mathbb{r}_i \times (e_i \mathbb{E}) \\ &= \underbrace{\frac{\sum_i \mathbb{r}_i e_i}{\sum_i e_i}}_{= \mathbb{r}_0 \text{ とおく}} \times \underbrace{\left(\sum_i e_i \mathbb{E}\right)}_{= \mathbb{F}} = \mathbb{r}_0 \times \mathbb{F} \end{aligned} \tag{34.9}$$

これは，剛体の運動が力 $\mathbb{F}$ の作用のみによって記述できることを示す。
もちろん，一様な重心場についてもまったく同様にして，

$$\mathbb{N} = \mathbb{R} \times \mathbb{F} = \mathbb{R} \times M\mathbb{g} \qquad (\mathbb{R}: \text{慣性中心}, \ \mathbb{g}: \text{重力加速度})$$

とかける。

一様な電場中の全ポテンシャル

$$\Delta U_i = -e_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{E} \quad (+\text{定数})$$

$$\therefore \quad U = -\sum_i e_i \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{E}$$

$$= -\frac{\sum_i e_i \mathbf{r}_i}{\sum_i e_i} \cdot \left(\sum_i e_i \mathbf{E}\right) = -e_{tot} \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{E} \qquad (34.9)'$$

となる．つまり $\mathbf{r}_0$ におけるポテンシャルのみを考えればよい．

もちろん，一様な重力場においてもまったく同様にして

$$U = -M\mathbf{R} \cdot \mathbf{g}$$

とすればよい．とくに，$\mathbf{g} = (0, g, 0)$ とすれば

$$U = -Mgy$$

となる．