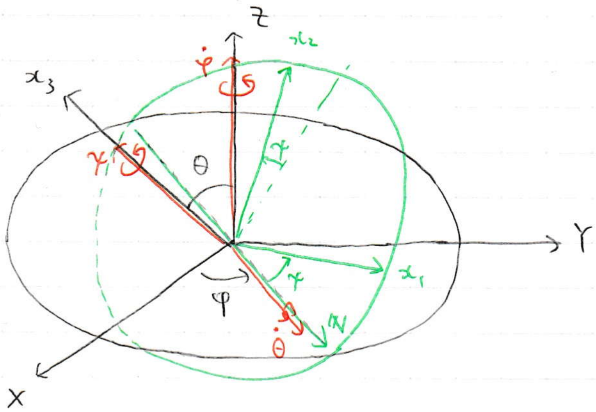
§35 オイラーの角

オイラーの角 θ, φ, ψ の決め方

θ, φ, ψ をきめる。θ と φ のきめ方は、極座標との類比で考えるととても分かりやすい。

- まずは θ をきめる。これは極座標の θ とまったく同じ（x_3 を r と同じと考えれば）。
- 次に XY 平面において交線ベクトル N を決め、φ を決める（この決め方も極座標ととてもよく似ているが、90°ほどずれていることに注意！）
- さいごに ψ を下のようにきめる。



剛体において固定された座標が慣性主軸 x_1, x_2, x_3 であるときを考えよう。このとき、慣性モーメントテンソル I_{ij} は対角成分しかもたないので、$\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ はたんに $\dot\theta, \dot\varphi, \dot\psi$ の射影によってのみ求めることができる。

$\dot\varphi$ は Z 方向、$\dot\theta$ は N 方向、$\dot\psi$ は x_3 方向を向いているので、これより

$$\omega = \begin{pmatrix} \dot\theta\cos\psi + \dot\varphi\sin\theta\sin\psi \\ -\dot\theta\sin\psi + \dot\varphi\sin\theta\cos\psi \\ \dot\varphi\cos\theta + \dot\psi \end{pmatrix} \qquad (x_1x_2x_3 \text{系で})$$

となる。以上より、回転運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}I_1(\dot\theta\cos\psi + \dot\varphi\sin\theta\sin\psi)^2 + \frac{1}{2}I_2(\dot\varphi\sin\theta\cos\psi - \dot\theta\sin\psi)^2 + \frac{1}{2}I_3(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi)^2$$

となる。

対称こまについて考える。このとき、$I_1 = I_2$ とできるので、これより回転エネは

$$\frac{1}{2}I_1(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})^2$$

となる。x_1, x_2 は自由にとっていいので、これより

$$\omega = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi}\sin\theta \\ \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

とみなしてよいことがわかる。

外力のないこまの運動

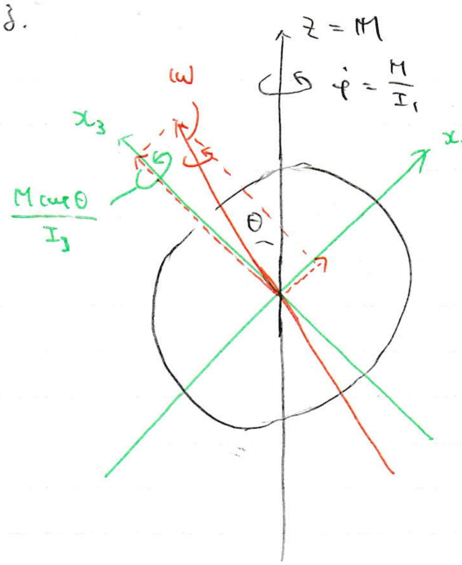
M を z 方向にとると、XYZ 系で $M = (0, 0, M)$ となる。
いま、ある瞬間に x_1 が交線ベクトルに等しいとすると、（そのように x_1 をとるのはいつでも可能である）、$x_1x_2x_3$ 系で $M = (0, M\sin\theta, M\cos\theta)$ となるので

$$0 = I_1\dot{\theta}, \quad M\sin\theta = I_1\dot{\varphi}\sin\theta, \quad M\cos\theta = (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})I_3$$

となる。これより

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \frac{M\sin\theta}{I_1}, \quad \omega_3 = \frac{M\cos\theta}{I_3}, \quad \dot{\varphi} = \frac{M}{I_1}$$

となる。



ここからわかるように、

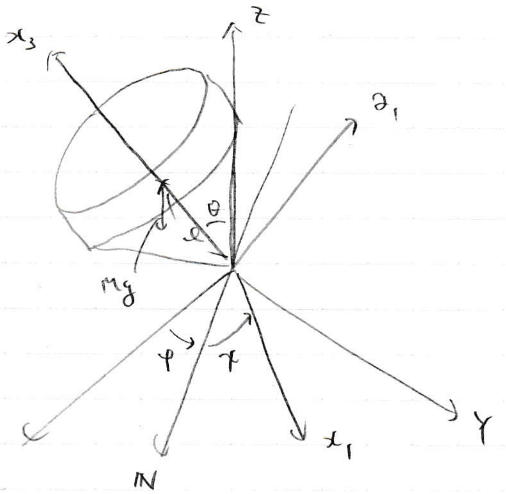
- z にたいする x_3 のかたむき θ は一定
- 歳差方向の角速度は
$$\dot{\varphi} = \frac{M}{I_1}$$
- 軸まわりの角速度は
$$\omega_3 = \frac{M\cos\theta}{I_3}$$

である。

重力中のこま

まえにも述べたように、剛体の不動点を慣性主軸の原点にとると第2項が消え、回転エネルギーだけが全K.E.になる。これより、ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}(I_1 + Ml^2)(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot\varphi \cos\theta + \dot\psi)^2 - Mgl\cos\theta$$



となる。あらためて

$$I_1' = I_1 + Ml^2$$

とおくと、

$$L = \frac{1}{2}I_1'(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi)^2 - Mgl\cos\theta$$

となる。角運動量とは一般化座標を角にとったときの運動量のことなので、zおよびx_3まわりの角運動量保存により

$$M_z = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = I_1' \dot\varphi \sin^2\theta + I_3(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi)\cos\theta = (\text{一定})$$

$$M_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = I_3(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi) = (\text{一定})$$

となる。$\left(\because \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 \text{ より} \right)$ これらをといて

$$\dot\varphi = \frac{M_z - M_3\cos\theta}{I_1' \sin^2\theta}, \quad \dot\psi = \frac{M_3}{I_3} - \cos\theta\,\frac{M_z - M_3\cos\theta}{I_1'\sin^2\theta} \quad \cdots ①$$

である。これによって$\dot\varphi$, $\dot\psi$がθを用いて表せた。

以上より、実質的な変数をθのみにしぼることができた。ここからは解析的に考察するのが難しいので、大まかに議論する。エネルギー保存は

$$E = \frac{1}{2}I_1'(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi)^3 + Mgl\cos\theta$$

追記

$$\frac{dU}{d\mu} = \frac{(M_z - M_3\mu)(M_3 - M_z\mu)}{I_1'^2(1-\mu^2)^2} + Mgh(1-\mu)$$

$(\mu = \cos\theta)$

(たぶんそんなに大きくない項)

これに①を代入して

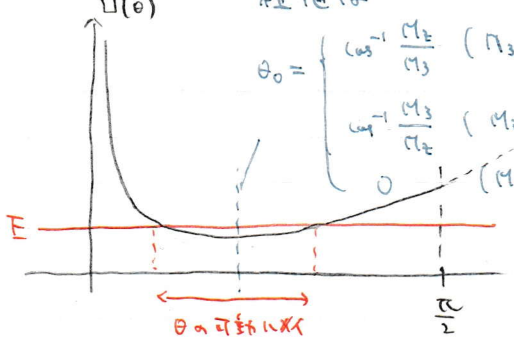
《第一項》　《第二項》

$$\underbrace{E - \frac{M_3^2}{2I_3} - Mgl}_{=E' \text{とおく}} = \boxed{\frac{I_1'}{2}\dot{\theta}^2} + \underbrace{\frac{(M_z - M_3\cos\theta)^2}{2I_1'\sin^2\theta} - Mgl(1-\cos\theta)}_{=U(\theta) \text{とおく}} \cdots ②$$

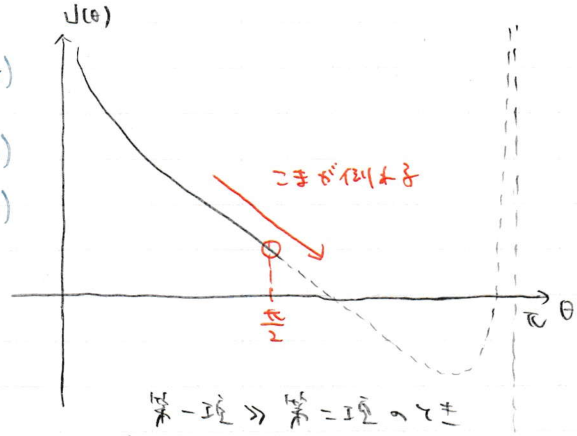
とかける．$U(\theta)$ を（グラフ描画サイトを用いて）図示すると，以下のようになる．

極値は

$$\theta_0 = \begin{cases} \cos^{-1}\frac{M_z}{M_3} & (M_3 > M_z) \\ \cos^{-1}\frac{M_3}{M_z} & (M_z > M_3) \\ 0 & (M_z = M_3) \end{cases}$$



第一項 ≫ 第二項のとき
（重力にくらべて回転が十分大きいとき）



第一項 ≫ 第二項のとき
（回転がおそくて重力の影響が強すぎるとき）

［角運動量がおちてくるとともにグラフの右側が下がってくる
可動ハンイが $\frac{\pi}{2}$ より少し小さいくらい（ココと地面が接触する角）にさしかかるとココはたおれる］

上の図からすぐにわかるように，重力にくらべて M_z, M_3 が十分大きい（つまりはやく回転）ほど，ココは安定してまわるようになる．

ここからは第一項が支配的なときのみ考える．つぎに M_z と M_3 の関係について考える．M_z と M_3 はなるべく近い値の方が安定して回る．というのも，

比例する

- $M_z \gg M_3$ のとき，第一項 $\sim 1/\sin^2\theta$ となり，$\frac{\pi}{2}$ のときもっとも安定
- $M_3 \gg M_z$ のとき，第一項 $\sim 1/\tan^2\theta$ となり，　〃

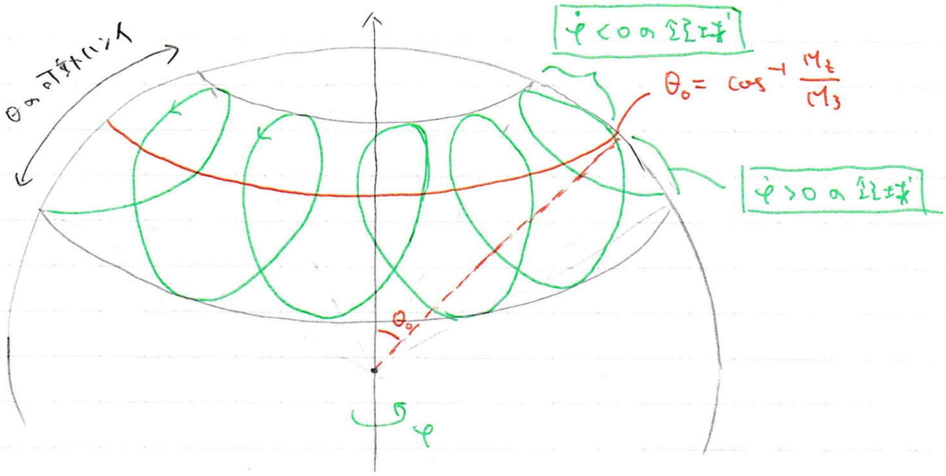
となるからである．このことは想像力をふくらませるとたしかに納得できる．

$$\frac{(1-\cos x)^2}{\sin x^2} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$$

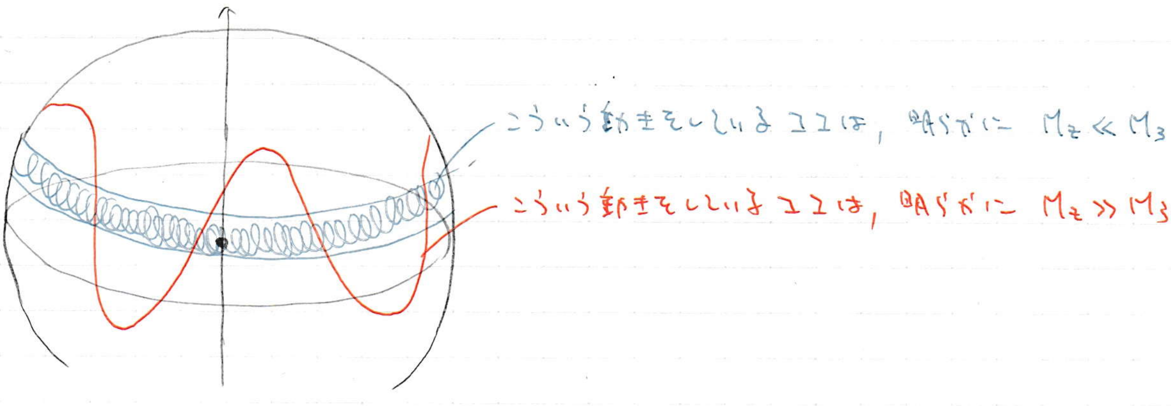
まわるコマをよくみていると，M_zとM_3の大小がわかる．①より，$M_3 > M_z$のとき
$\dot{\varphi}$ は

$$\theta_0 \leq \cos^{-1}\frac{M_z}{M_3}$$

のとき，負になる．つまりコマの中心軸は次のような動きをする：



これより，



とバレてしまう．

$M_3 \simeq M_z$ のときは，以下に示すように，安定な極値がほとんど $\theta \simeq 0$ になる．つまりコマは垂直に立つ．かりに $M_3 = M_z$ とすると，

$$(\text{第一項}) = \frac{M^2}{2I}\Big(\underbrace{\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}}_{=f(\theta)\text{とおく}}\Big)^2 \propto f(\theta)^2$$

となる．

ここで

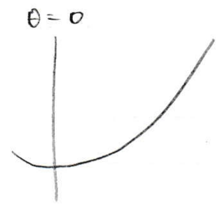
$$f(\theta) = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} \qquad (\theta \neq 0)$$

とおくと

$$\lim_{\theta\to0} f(\theta) = \lim_{\theta\to0}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\sin\theta(1+\cos\theta)} = \frac{\sin 0}{1+\cos 0} = 0$$

となることより

$$f(0) := 0$$



と解析接続すれば，$f(\theta)$ は右のようなグラフになる．
ここからわかるのは，$M_3 = M_z$ のとき $\theta=0$ がもっとも安定であるということである．
いま，$\theta=0$ が実現しているとすると，エネルギー保存②に $\theta=0$ を代入して
(もちろん $M_z = M_3$ なので)

$$E' = 0$$

となる．ここで $\theta=0$ が実現するための $M_3 = M_z = L$ の条件を求めよう．$\theta \approx 0$ では

$$U(\theta) \approx \left(\frac{L^2}{8I_1'} - \frac{Mgl}{2}\right)\theta^2$$

これより回転が安定な条件は

$$U(\theta) < E' = 0$$

$$\therefore \quad L^2 > 4I_1' gMl$$

である．すなわち

$$(I_3\omega_3)^2 > 4I_1' gMl$$

である．