§38 剛体の接触

まず，断っておくべきことがある．本節では，教科書（ランダウ）の表現に従って，まさつ力を「動摩擦力」という意味においてのみ用いる．静止しているときにもおこる力は，すべて"抗力"として用いる．

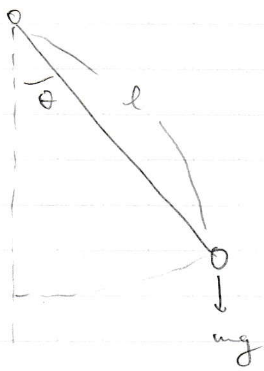
抗力は物体の接触面において生じ，それぞれの物体にはたらく力は反対方向である（高校物理と同じ）．

剛体が接触しているということは，すなわち，系全体に，ある拘束条件があるということである．そこでここでは，拘束をどのようにしてとけばよいのか，考えてみよう．

<u>ホロノームと非ホロノーム</u>

拘束条件が系の座標だけで表される場合，その拘束はホロノームであるといわれる．そうでないとき，拘束は非ホロノームといわれる．ホロノームは非ホロノームより圧倒的に解きやすい．というのも，座標を直接一コ消せるからである．それに対して，非ホロノームの場合は，座標を消せないので，解くのがはるかに厄介になる．

㊕ ひもがたるまない振り子（もっとも単純なホロノーム）



ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - mgr(1-\cos\theta)$$

となる．拘束条件 $r = l$ より座標が1コ消せるので，これより

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1-\cos\theta)$$

となる．定数 $-mgl$ は力学的イミをもたないので，以上より

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

である．

ホロノーム な条件は，もちろん 数学的に

$$f_\alpha(q_1, q_2, \cdots, q_N, t) = 0 \qquad (\alpha \text{は条件の数}) \qquad \cdots ①$$

と表せる．① を t で微分すると

$$\frac{df_\alpha}{dt} = \sum_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i}\dot{q}_i = \sum_i C_{\alpha i}\dot{q}_i \qquad \left(C_{\alpha i} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i} \text{とおいた} \right)$$

$$\therefore \sum_i C_{\alpha i}\dot{q}_i = 0 \qquad (C_{\alpha i} \text{は座標の関数}) \qquad \cdots ②$$

とかける．逆に ② のみから ① はみちびかれないことに注意する！ ② だけでは，② が何か座標のみの関数の全微分でかけるとはいえないからである．ここからわかるように，② が座標と時間の関数の全微分でかけることを ホロノミック な拘束と呼んでも，それは同じことである．

ラグランジュの未定乗数法

拘束条件 ② をとく一般的な方法がある．② に λ_α (α は条件の数) を加えて α で足し上げる．

$$\sum_\alpha \sum_i \lambda_\alpha C_{\alpha i}\dot{q}_i = 0$$

これより

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_\alpha \sum_i \lambda_\alpha C_{\alpha i}\, \delta q\, dt = 0$$

これを作用 S につけ加えると

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \sum_\alpha \lambda_\alpha C_{\alpha i} \right) \delta q\, dt$$

これより

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_\alpha \lambda_\alpha C_{\alpha i} \qquad \cdots ③$$

となる．これと ② を連立してとくことにより，解を求める．

とくに ホロノミック な拘束条件の場合，③ を

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_\alpha \lambda_\alpha f_\alpha \right)$$

$$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(L + \sum_\alpha \lambda_\alpha f_\alpha \right) = 0$$

とがきめられるので，新たに

$$L' = L + \sum_\alpha \lambda_\alpha f_\alpha$$

とおくと，②と③をまとめて，求める条件を

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L'}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{\lambda}_\alpha}\right) - \frac{\partial L'}{\partial \lambda_\alpha} = 0 \qquad (i=1,\dots,N,\ \alpha=1,\dots,m)$$

という $N+m$ 個の方程式にまとめることができる．

ダランベールの原理

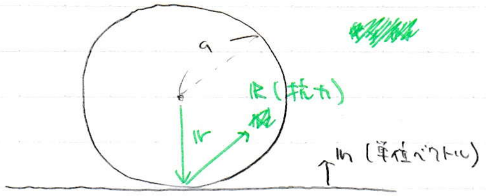
以上とはべつに，ダランベールの原理というやり方もある．これは抗力をすべてふくめて運動方程式

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \sum_i \boldsymbol{f}_i, \quad \frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{f}_i$$

をとくというものである．これはホロノームな拘束にも非ホロノームな拘束にも対応できる．抗力ははじめは未知だが，いずれ方程式をとくことによって物体の運動とともにきまるであろう．

外力 $\boldsymbol{F}$ およびモーメント $\boldsymbol{N}$ のもとで転がる球（半径 a）

重心を基準に考える．抗力による重心まわりの $\boldsymbol{R}$ のモーメントは，



$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{R} = -a\,\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{R} \qquad \left(\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

これより，運動方程式はすべて静止座標系で

$$M\dot{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R} - mg\,\boldsymbol{n} \qquad \cdots ①$$

$$I\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{N} - a\,\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{R} \qquad \cdots ②$$

である．

拘束条件は，つまり球がすべらない条件であって，剛体の接触面において $\boldsymbol{v} = 0$ となる条件である．ここで $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ なのでこれより

$$0 = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{\omega} \times (-a\,\boldsymbol{n})$$

$$\therefore\ \boldsymbol{V} - a\,\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{n} = 0 \qquad \cdots ③$$

である．これは明らかに非ホロノミックである．

③をtで微分して①に代入

$$Ma\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbb{n} = \mathbb{F} + \mathbb{R} - Mg\mathbb{n} \qquad \cdots ④$$

いっぽう，②に左から$\mathbb{n}$をかけて④を代入すると

$$-\frac{I}{Ma}(\mathbb{F}+\mathbb{R}-Mg\mathbb{n}) = \mathbb{n}\times\mathbb{N} - a\,\mathbb{n}\times(\mathbb{n}\times\mathbb{R})$$

$$= \mathbb{n}\times\mathbb{N} - a\mathbb{n}(\mathbb{n}\cdot\mathbb{R}) + a\mathbb{R}|\mathbb{n}|^2$$

これより$I=\frac{2}{5}a^2M$を代入して

$$\frac{2a}{5}(\mathbb{F}+\mathbb{R}-Mg\mathbb{n}) = \mathbb{N}\times\mathbb{n} + a\mathbb{n}(\mathbb{n}\cdot\mathbb{R}) - a\mathbb{R}$$

である．各成分をとりだして

$$\frac{2a}{5}\begin{pmatrix} F_x + R_x \\ F_y + R_y \\ F_z + R_z - Mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_y - aR_x \\ -N_x - aR_y \\ 0 \cancel{-aR_z} + \cancel{aR_z} \end{pmatrix}$$

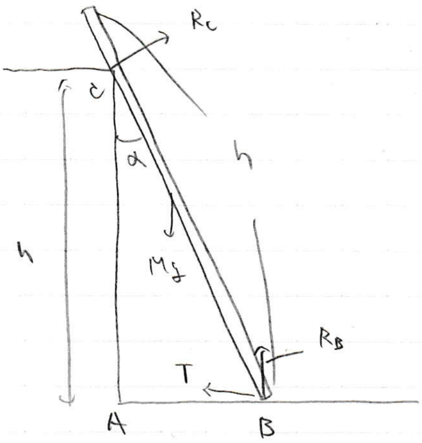
これより

$$R_x = \frac{5}{7a}\left(N_y - \frac{2a}{5}F_x\right) = \frac{5}{7a}N_y - \frac{2}{7}F_x$$

$$R_y = -\frac{5}{7a}N_x - \frac{2}{7}F_y, \quad R_z = Mg - F_z$$

となり，抗力$\mathbb{R}$が求まった！あとは①，②に代入すれば運動方程式の完成である．
（なお，ω_1, ω_2については③とv_x, v_yを用いて求めることも可能）．

たてかけてある棒



力のつりあい

x方向 ： $0 = R_C \cos\alpha - T$ ……①

y方向 ： $0 = R_C \sin\alpha + R_B - Mg$ ……②

B点のまわりの力のモーメントのつりあい

$$Mg\frac{l}{2}\sin\alpha = R_C\frac{h}{\cos\alpha}$$ ……③

以上を解いて

$$R_C = \frac{Mgl}{2h}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{Mgl}{4h}\sin 2\alpha$$

$$T = R_C\cos\alpha, \quad R_B = Mg - R_C\sin\alpha$$

となる. R_Cが最大になるのは $\alpha = 45°$ のとき.