§39 非慣性系における運動

ここでは非慣性系におけるラグランジアンについて考える.
まずは, もっとも簡単な並進運動について考える.

並進運動

慣性系 K_0 にたいして並進速度 $V(t)$ (並進なので位置の関数は入ってこない) で動く系 K' を定める. このとき, K_0, K' における粒子の速度 v_0, v' の間には

$$v' = v_0 - V(t)$$

の関係がある. これは図を書けばすぐに分かるが, もっと強力な考え方をおさえておく.
この考え方は強力なので, 必ず身につけておく.

K' は K_0 に対して並進速度 $V(t)$ で動いている. これより, v' を求めるためには, はじめの速度 v_0 から系の動いた分 $V(t)$ を差っ引くのである.

$$\underbrace{v'}_{K'\text{系の速度}} = \underbrace{v_0}_{K_0\text{系の速度}} \underbrace{- V(t)}_{\text{はじめの速度}v_0\text{から, 座標が動いた分}V(t)\text{を差っ引く}} \quad \cdots ①$$

この考え方を身につけておけば, いちいち図を書いて確認する必要はない. その上, のちに分かるように この考え方は並進運動以外にもすべての座標変換について適用できる.

もう1つ重要なことがある. それは, ラグランジュ方程式のみならず, ラグランジアン L の値も座標変換にたいして値を (力学的に) 変えないということである. すなわち, 一般化座標 q_i, θ_i $(i=1,2,\cdots,N)$ で与えられたラグランジアン $L(q,\dot{q},t)$, $L'(\theta,\dot{\theta},t)$ にたいして,

$$L(q,\dot{q},t) = L'(\theta,\dot{\theta},t) \underbrace{\left(+\frac{d}{dt}f(q,t)\right)}_{(\text{力学的に})}$$

が成り立つ, ということである. これは ラグランジュ方程式が座標変換にたいして共変であること

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \iff \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta_i}$$

の証明によって確認できる. このことは自力で確かめられなければいけないので, 今回は復習しない.

以上ですべての準備は整った.

今さっき述べたように、ラグランジアンLはどこから出発しても同じなので、もっとも簡単なK_0系（慣性系）のラグランジアンから出発する。ラグランジアンLは

$$L_0(\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0, t) = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_0^2 - \underline{U_0(\mathbf{r}_0)}$$

となる。①を代入して

（ポテンシャルはスカラーなので、今回は考える必要はない）

$$L'(\mathbf{r}', \dot{\mathbf{r}}', t) = L_0(\mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0, t)$$

$$= \frac{1}{2} m (\mathbf{v}' + \mathbf{V})^2 - \underline{U'(\mathbf{r}')} \qquad (\text{但し}\ U_0(\mathbf{r}_0) = U'(\mathbf{r}') = U)$$

$$= \frac{1}{2} m \mathbf{v}'^2 + m \mathbf{v}' \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2} m \mathbf{V}^2 - U'(\mathbf{r}')$$

$$= \frac{1}{2} m \mathbf{v}'^2 \cancel{+ m \frac{d}{dt}(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{V})} - m \mathbf{r}' \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cancel{+ \frac{1}{2} m \mathbf{V}(t)^2} - U'(\mathbf{r}')$$

$\frac{d}{dt} f(\mathbf{r}, t)$ の形なので、おとせる。

$$= \frac{1}{2} m \mathbf{v}'^2 - m \mathbf{r}' \cdot \mathbf{A}'(t) - U'(\mathbf{r}') \qquad \cdots ②$$

となる。ここで $\mathbf{A}'(t) = \frac{d\mathbf{V}}{dt}$ は座標K'の慣性系にたいする加速度である（$\mathbf{A}'(t) = 0$ のときラグランジアンは慣性系と同じ形になる）。これより

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{\mathbf{r}}'} = m \ddot{\mathbf{r}}', \qquad \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{r}'} = -m \mathbf{A}(t) - \frac{\partial U'}{\partial \mathbf{r}'}$$

となり、以上より、運動方程式は

$$m \ddot{\mathbf{r}}' = \underbrace{-\frac{\partial U'}{\partial \mathbf{r}'}}_{K'\text{系で受ける ポテンシャル由来の力}} \underbrace{- m \mathbf{A}(t)}_{\text{並進加速により受ける力}}$$

となる。これは高校物理でもよく知られた結果である。

回転座標系の場合

以上の考え方は、回転座標系にたいしても、エレガントに適用することができる（デカルトでこれを愚直にやるとすごくだるい）。まず、K'と原点を共有し、角速度ベクトル$\boldsymbol{\omega}$で回っている系Kを考える。このとき、K上の位置ベクトル$\mathbf{r}$の点は、K'からみて速度$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$で動いている。

よって、$\mathbf{v}$を求めるためには$\mathbf{v}$からみてその分だけ"巻き戻す"必要があるので、

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \quad \cdots ③$$

とかける．

次に，②の第2項について考える．第2項の

$$\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{A}'(t)$$

は，座標の回転変換について不変という意味でスカラーであるから，

$$\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{A} \quad \cdots ④$$

とすればよい．ここで $\boldsymbol{A}(t)$ は K 系からみたベクトル $\boldsymbol{A}'(t)$ の表現である．

[$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{A}$ がスカラーであることの証明]

K' → K は回転変換なので，基底の変換行列 $R(t)$ を用いて

$$\boldsymbol{r} = R^{-1}(t)\,\boldsymbol{r}' \iff {}^t\boldsymbol{r} = {}^t\boldsymbol{r}' R(t) \quad \cdots A_1$$

$$\left(但し \quad {}^t\boldsymbol{r} = (\circ \ \circ \ \circ) \quad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \\ \circ \end{pmatrix} \right)$$

とかける（成分の変換行列が基底の変換行列の逆行列になっている．これが $\boldsymbol{r}$ が反変ベクトルとよばれるゆえんである）．ここで $R(t)$ は角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}(t)$ のまわりでの回転行列であり，それゆえよく知られているように直交行列である（$R^{-1} = {}^tR$）．

まったく同じように

$$\boldsymbol{A} = R^{-1}(t)\,\boldsymbol{A}' \quad \cdots A_2$$

である．以上 A_1, A_2 より

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{A} = {}^t\boldsymbol{r}\boldsymbol{A} = {}^t\boldsymbol{r}' \underbrace{R(t)\,R^{-1}(t)}_{= I_3} \boldsymbol{A}' = {}^t\boldsymbol{r}'\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{A}'$$

である．

$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{A}$ が座標の回転変換にたいして値を変えないことは，ラグランジアンは座標のとりかたにたいして力学的に不変であることを考えると，当然の帰結である．

※ 回転行列 $R_3(t)$ が直交行列であること，直交行列の変換にたいして一般の内積が不変であることは，常識としておく．

以上③,④を②に代入して

$$L = \frac{1}{2}m(\mathbf{v}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})^2 - m\mathbf{r}\cdot\mathbf{A}(t) - U(\mathbf{r})$$

$$= \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}m|\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}|^2 + m\mathbf{v}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) - m\mathbf{r}\cdot\mathbf{A}(t) - U(\mathbf{r}) \quad \cdots ⑤$$

となり,ラグランジアンが求まった! Lの全微分は

$$dL = m\mathbf{v}\,d\mathbf{v} + \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})(\boldsymbol{\omega}\times d\mathbf{r}) + \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega}\times d\mathbf{r})(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$$

$$+ m\,d\mathbf{v}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + m\mathbf{v}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times d\mathbf{r}) - m\,d\mathbf{r}\cdot\mathbf{A} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}d\mathbf{r}$$

$$= m\mathbf{v}\,d\mathbf{v} + m(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times d\mathbf{r}) + m\,d\mathbf{v}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + m\,d\mathbf{r}\cdot(\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega})$$

$$- m\mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}d\mathbf{r}$$

となるが,このとき

$$(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times d\mathbf{r}) = \varepsilon_{ijk}\omega_j r_k \varepsilon_{imn}\omega_m dr_n$$

$$= \varepsilon_{nim}(\varepsilon_{ijk}\omega_j r_k)\omega_m dr_n$$

$$= \{(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\times\boldsymbol{\omega}\}\cdot d\mathbf{r} = -(\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}))\cdot d\mathbf{r}$$

とかける.以上より

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m\mathbf{v} + m(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = -m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + m(\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega}) - m\mathbf{A} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$$

となり,ラグランジュ方程式は

$$m\ddot{\mathbf{r}} + m(\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}}) + m(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}) = -m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) - m(\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}})$$

$$- m\mathbf{A} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$$

$$\therefore\ m\ddot{\mathbf{r}} = \underbrace{-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}}_{\text{K系で受ける ポテンシャル由来の力}} \underbrace{- m\mathbf{A}}_{\text{並進による 慣性力}} \underbrace{- m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})}_{\text{遠心力}} \underbrace{- 2m(\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}})}_{\text{コリオリの力}} \underbrace{- m(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r})}_{\text{角速度変化に伴う 慣性力 (オイラー力)}}$$

となる.これはニュートン力学できわめてよく知られている結果である

遠心力は，R系にたいして静止しているどの座標系でも受ける力である．コリオリの力は $\dot{\mathbb{r}} \neq 0$ のとき（つまり速度をもっているとき）に生じる．オイラー力は $\dot{\omega} \neq 0$ のときに生じる力である．

せっかくなので，R系におけるハミルトニアン H もおめておこう．運動量 $\mathbb{p}$ は

$$\mathbb{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbb{r}}} = m\dot{\mathbb{r}} + m(\omega \times \mathbb{r}) \quad \cdots ⑥$$

$$\therefore \dot{\mathbb{r}} = \frac{\mathbb{p}}{m} - \omega \times \mathbb{r}$$

なので，これより，ハミルトニアン H は

$$H = \mathbb{p} \cdot \dot{\mathbb{r}} - L$$

$$= \mathbb{p} \cdot \left(\frac{\mathbb{p}}{m} - \omega \times \mathbb{r}\right) - \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathbb{p}}{m} - \omega \times \mathbb{r}\right)^2 - \frac{1}{2}m|\omega \times \mathbb{r}|^2$$

$$- m\left(\frac{\mathbb{p}}{m} - \omega \times \mathbb{r}\right) \cdot (\omega \times \mathbb{r}) + m\,\mathbb{r} \cdot \mathbb{A}(t) + U(\mathbb{r})$$

となる．これは一見汚いが，展開するとなぜか大半の項は消えて，結局

$$H = \frac{\mathbb{p}^2}{2m} - \mathbb{p} \cdot (\omega \times \mathbb{r}) + m\,\mathbb{r} \cdot \mathbb{A} + U$$

を得る．

回転運動の一般論

さいごに，$\dot{\omega} = 0$, $\mathbb{A} = 0$ のときを考察しよう．このとき，いろいろとおいしいことがたくさんあるので，論じることにする．

ラグランジアン L，運動量 $\mathbb{p}$ は ⑤, ⑥ より

$$L = \frac{1}{2}m v^2 + \frac{1}{2}m|\omega \times \mathbb{r}|^2 + m v \cdot (\omega \times \mathbb{r}) - U(\mathbb{r})$$

$$\mathbb{p} = m\dot{\mathbb{r}} + m(\omega \times \mathbb{r})$$

となる．これより，全エネルギー E は

$$E = \mathbb{p} \cdot v - L = m v^2 \cancel{+ m v \cdot (\omega \times \mathbb{r})} - \frac{1}{2}m v^2 - \frac{1}{2}m|\omega \times \mathbb{r}|^2$$

$$\cancel{- m v \cdot (\omega \times \mathbb{r})} - U(\mathbb{r})$$

$$\therefore E = \frac{1}{2}m v^2 \underbrace{- \frac{1}{2}m|\omega \times \mathbb{r}|^2}_{\text{遠心エネルギー}} - U(\mathbb{r})$$

となる．

ところで，原点を共有する慣性系K_0と，回転系におけるそれぞれの粒子の速度を$\mathbf{v}_0$，$\mathbf{v}$とすると，これら2つの間には

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

の関係がある．これより

$$\underbrace{m\mathbf{v}_0}_{\substack{\| \\ \mathbf{p}_0\ (K_0\text{系の運動量})}} = m\mathbf{v} - m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \mathbf{p} \quad (K\text{系の一般化運動量})$$

となり，

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}$$

が成り立つ．つまりK系の一般化運動量は，K_0系の運動量に等しい．