§41 ラウス関数

ラグランジアンから，一部の変数だけ $\dot{q} \to p$ に変換することを考えてみよう．
例として，ラグランジアン

$$L(q, \xi, \dot{q}, \dot{\xi})$$

を考える．これより

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q}dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}d\dot{\xi}$$

$$= \dot{p}\,dq + p\,d\dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}d\dot{\xi}$$

$$\therefore\ d(L - p\dot{q}) = \dot{p}\,dq - \dot{q}\,dp + \frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}d\dot{\xi}$$

となる．以上より，ラウス関数 $R(q, \xi, p, \dot{\xi})$ を

$$R = p\dot{q} - L \quad \cdots ①$$

とおくと，

$$dR = -\dot{p}\,dq + \dot{q}\,dp - \frac{\partial L}{\partial \xi}d\xi - \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}d\dot{\xi} \quad \cdots ②$$

$$\therefore\ \frac{\partial R}{\partial q} = -\dot{p},\quad \frac{\partial R}{\partial p} = \dot{q},\quad \frac{\partial R}{\partial \xi} = -\frac{\partial L}{\partial \xi},\quad \frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}} = -\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} \quad \cdots ③$$

とかける．③の後半を

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \xi}$$

に代入し，③の前半とあわせると，以上より

$$\frac{\partial R}{\partial q} = -\dot{p},\quad \frac{\partial R}{\partial p} = \dot{q},\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \xi} \quad \cdots ④$$

である．つまり，ラウス関数 R は q, p については ハミルトニアンのようにふるまい，$\xi, \dot{\xi}$ については ラグランジアンのようにふるまう．

ラウス関数を用いて全エネルギーを表現することを考えよう．系の全エネルギーは，L を用いて

$$E = \dot{q}p + \dot{\xi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} - L$$

とかける．これより，①，③を代入して，E は R を用いて以下のようにかける．

$$E = \underbrace{\dot{q}p - L}_{=R} + \dot{\xi}\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}}_{=-\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}}} = R - \dot{\xi}\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}} \quad \cdots ⑤$$

ラウス関数が有用であるとき

ラウス関数が有用であるのは，系が座標 q をあらわにふくまないときである。
このとき，$L = L(\xi, \dot{q}, \dot{\xi})$ とかけるので，ラグランジュ方程式より

$$\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \qquad \therefore p = (\text{定数})$$

である。よって，適切な定数 p をラウス関数 $R(\xi, p, \dot{\xi})$ に代入して

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R(\xi, p, \dot{\xi})}{\partial \dot{\xi}} = \frac{\partial R(\xi, p, \dot{\xi})}{\partial \xi} \qquad \cdots ⑥$$

となり，q についての座標は完全に消去され，ξ 座標のみについての問題になる。さいごに $\xi(t)$ が求まったら，それを③式

$$\dot{q} = \frac{\partial R(\xi, p, \dot{\xi})}{\partial p}$$

に代入すればよい。これによって（初期条件をのぞいて）q のようすが決まる。

(例) 中心力中の2次元極座標
ラグランジアンは

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r)$$

とかける。θ は循環座標なので，ラウス関数に移行して，($p_\theta = mr^2\dot{\theta}$ より)

$$R(r, p_\theta, \dot{r}) = p_\theta\dot{\theta} - L = \frac{p_\theta^2}{mr^2} - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + U(r)$$

$$\therefore R(r, p_\theta, \dot{r}) = \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U(r)$$

である。