§42 ポアソンの括弧式

$f(p,q,t)$ という関数について、これの時間についての完全導関数は

$$\frac{df}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \cdot \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \quad \cdots ①$$

とかける。ここで、ポアソン括弧を

$$\{f,H\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \quad \cdots ②$$

で定義すると、①式は

$$\frac{df}{dt} = \{f,H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

とかける。とくに、$f(p,q,t)$ が時間にあらわによらないとき ($f = f(p,q)$ のとき) は、この式は

$$\frac{df}{dt} = \{f,H\} \quad \cdots ③$$

とかける。これは量子力学におけるハイゼンベルクの運動方程式

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[A,H] \qquad ([A,H] = AH - HA) \quad \cdots ④$$

にとてもよく似ている。

ポアソン括弧の性質

(i) $\{f,g\} = -\{g,f\}$

(ii) $\{f,c\} = 0$ （cは定数）

(iii) $\{f_1+f_2, g\} = \{f_1,g\} + \{f_2,g\}$

(iv) $\{f_1 f_2, g\} = f_1\{f_2,g\} + f_2\{f_1,g\}$

(v) ヤコビの恒等式

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0 \quad \cdots ⑤$$

(v)の証明　一般に2つカッコでくくられている場合は、その数についての2回偏導関数がすべての項に必ず表れている。そこで、fの2回偏導関数の項をすべてとりだして、そのような項がたがいにうちけし合って合計0になっていることが示せれば、g,hにも同じようなことをすることができて、証明は完了する。 … ⑥

さて、ポアソンカッコは、どれか1つの関数について着目すると、

$$\{g,f\} = \underbrace{\sum_i \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \right)}_{= D_1 \text{ とおく}} f = D_1 f$$

として線型微分方程式とみなすことができる. さらに D_1 を変形して,

$$D_1 = \sum_{\alpha=1,2} \sum_i \left(\tilde{g}_{\alpha,i} \frac{\partial}{\partial r_{\alpha,i}} \right)$$

(但し $\alpha = 1,2$ の順に $\tilde{g}_{\alpha,i} = \frac{\partial g}{\partial q_i}, -\frac{\partial g}{\partial p_i}$, $r_{\alpha,i} = p_i, q_i$)

とかける. 同じようにして,

$$D_2 = \sum_\beta \sum_j \left(\tilde{h}_{\beta,j} \frac{\partial}{\partial r_{\beta,j}} \right), \quad \{h,f\} = D_2 f$$

とかける.

以上より, ⑤においてfの2回導関数があらわれうる項をすべて書き出すと, (⑤の第一項はなくて)

$$\{g,\{h,f\}\} - \{h,\{g,f\}\} = (D_1 D_2 - D_2 D_1) f$$

$$= \sum_{\alpha,i} \left[\tilde{g}_{\alpha,i} \frac{\partial}{\partial r_{\alpha,i}} \left(\sum_{\beta,j} \tilde{h}_{\beta,j} \frac{\partial}{\partial r_{\beta,j}} \right) \right] f - \sum_{\beta,j} \left[\tilde{h}_{\beta,j} \frac{\partial}{\partial r_{\beta,j}} \left(\sum_{\alpha,i} \tilde{g}_{\alpha,i} \frac{\partial}{\partial r_{\alpha,i}} \right) \right] f$$

$$= \sum_{\alpha,i} \sum_{\beta,j} \left[\tilde{g}_{\alpha,i} \frac{\partial \tilde{h}_{\beta,j}}{\partial r_{\alpha,i}} \frac{\partial}{\partial r_{\beta,j}} + \cancel{\tilde{g}_{\alpha,i} \tilde{h}_{\beta,j} \frac{\partial^2}{\partial r_{\alpha,i} \partial r_{\beta,j}}} - \cancel{\tilde{h}_{\beta,j} \tilde{g}_{\alpha,i} \frac{\partial^2}{\partial r_{\beta,j} \partial r_{\alpha,i}}} \quad \tilde{h}_{\beta,j} \frac{\partial \tilde{g}_{\alpha,i}}{\partial r_{\beta,j}} \frac{\partial}{\partial r_{\alpha,i}} \right] f$$

$$= \sum_{\alpha,i} \sum_{\beta,j} \left[\tilde{g}_{\alpha,i} \frac{\partial \tilde{h}_{\beta,j}}{\partial r_{\alpha,i}} \frac{\partial}{\partial r_{\beta,j}} - \tilde{h}_{\beta,j} \frac{\partial \tilde{g}_{\alpha,i}}{\partial r_{\beta,j}} \frac{\partial}{\partial r_{\alpha,i}} \right] f$$

$$= (f \text{ の一階偏導関数のみの項})$$

となる. これは, ⑤の左辺において, fの二階偏導関数は表れないことを示している. これは明らかにg, hについても同じような結果となる. よって⑥より, ⑤は示された.