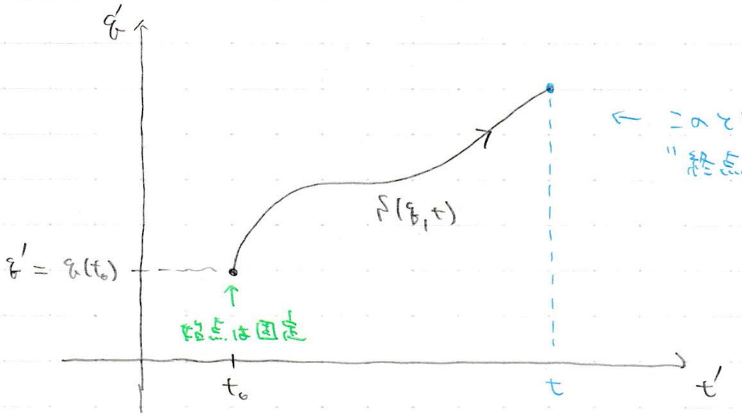
§43 座標の関数としての作用

これまで作用は"経路"のみの関数であるとみてきたが，ここで考えを改めて，作用 $S(q,t)$ を

$$S(q,t) = \int_{t_0}^{t} L(q,\dot{q},t')\,dt' \qquad (\text{但し } t_0,\ q(t_0) \text{ は固定点}) \qquad \cdots ①$$

と定義しなおそう．これはラグランジュ力学における作用の定義の拡張になっている．これの図式的意味を下図に示してみる．始点 t_0, $q(t_0)=q'$ は固定されているとき，いわゆる経路というのは，"経路 $q(t)$"と，"終点 t"によって決まると考えるのが自然であろう．このように，作用 S における引数は q と t のみであるが，これは本質的に"経路 $q'=q(t)$"と"終点 t"に依存していると捉えれば，きわめて自然なことである．



← このとき作用は，"経路 $q'=q(t)$"と"終点 t"によって一意に定まる．

作用 $S(q,t)$ の全微分表現

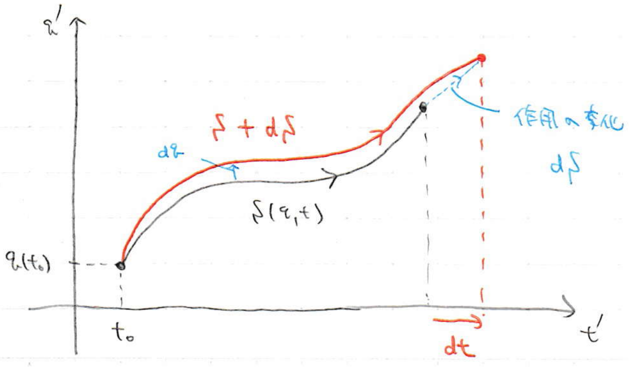
上で述べたように，作用 S は $S(q,t)$ のとき完全に定まる．そこで，$S(q,t)$ が完全な関数になることを期待して，S を

$$dS = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial S}{\partial t}dt \qquad \cdots ②$$

と，全微分の形でかいてみることを考える．

$$\frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial S}{\partial t}$$

を具体的に求めてみよう．これはどのような関数になるのだろうか．



これより

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L\right) = -H \qquad \cdots ⑥$$

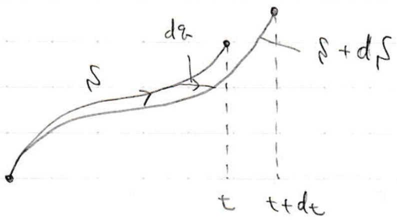
である. 以上より, ④, ⑥を②に代入して

$$dS = \sum_i p_i \, dq_i - H\,dt \qquad \cdots ⑦$$

である.

⑦をみちびくために, オイラー・ラグランジュ方程式が必要だったことに注意しよう. つまり, ⑦は実際に実現する経路について成り立つ式である. 物理的な意味で経路が現実に実現するためには, 作用 $S(q_i, t)$ は q_i と t の全微分で表現される必要があるのである. そしてこのとき, 偏微分の結果はそれぞれ(一般化)運動量とハミルトニアン H なのである.

⑦から正準方程式をみちびく



⑦を用いていくと, 作用は

$$S = \int \left(\sum_i p_i \, dq_i - H\,dt\right) \qquad \cdots ⑧$$

とかける. ここで, 両端の t_1, t_2, $q(t_1)$, $q(t_2)$ を固定して, 最小作用の原理をみちびくことを考えよう.

S の変分 δS は,

$$\delta S = \int \left[\delta p\, dq + p\, \delta(dq) - \left(\frac{\partial H}{\partial p}\delta p + \frac{\partial H}{\partial q}\delta q\right) dt \right]$$

$$= \underbrace{\left[\delta q\, p\right]}_{=0} + \int \left[\delta p\, dq - \delta q\, dp - \left(\frac{\partial H}{\partial p}\delta p + \frac{\partial H}{\partial q}\delta q\right) dt \right]$$

$$= \int \delta p \left[dq - \frac{\partial H}{\partial p} dt \right] + \int \delta q \left[-dp - \frac{\partial H}{\partial p} dt \right] \qquad \cdots ⑨$$

とかける. ⑨より, $\delta S = 0$ となるための条件は,

$$dq = \frac{\partial H}{\partial p} dt, \qquad dp = -\frac{\partial H}{\partial q} dt \qquad \cdots ⑩$$

である. これを dt で割れば, これはまさにハミルトンの正準方程式そのものである.