§44 モーペルテュイの原理

前節では，$S(q,t)$ において成り立つ全微分の式

$$dS = \sum_i p_i dq_i - H dt \qquad \cdots ①$$

を導いた．これの積分を行うと，作用は，t_0, t_1 を定数として

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_i p_i dq_i - H dt \right) \qquad \cdots ②$$

とかける．

ここでは，エネルギー E が保存する場合について考えてみよう．このとき，ハミルトニアン H は一定 ($H=E$) なので，② に代入して，

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_i p_i dq_i - E dt \right)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sum_i p_i dq_i - E(t_1 - t_0) \qquad \cdots ③$$

となる．③ の $E(t_1-t_0)$ は明らかに作用の変分に対して何も影響しないので，ここでは考えなくてよいことになる．

以上の考察より，最小作用の原理は，簡約された作用 S_0

$$S_0 = \int \sum_i p_i dq_i \qquad \cdots ④$$

が最小値（停留値）をとる条件にかきかえることができる．

実際に ④ を計算するためには，p_i を q_i を用いて表現しておく必要がある．そのためには，エネルギー保存の式を用いるのがよいだろう．エネルギー保存は

$$E\left(q, \frac{dq}{dt}\right) = E$$

とかけるはずである．これによって dt が q, dq によって表される．これによって得られた dt を

$$p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L\left(q, \frac{dq}{dt}\right)$$

に代入することによって，p_i を q_i を用いて表すことができるのである．

一般のラグランジアンについて

一般のラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k - U(q) \qquad \cdots ⑤$$

について，表式を考えてみよう．運動量は

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_k a_{ik}\dot{q}_k \qquad \cdots ⑥$$

エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i,k} a_{ik}(q)\dot{q}_i\dot{q}_k + U(q)$$

$$\therefore \quad dt = \sqrt{\frac{\sum a_{ik}(q)\,dq_i\,dq_k}{2(E-U)}} \qquad \cdots ⑦$$

となる．以上より，代入して，

$$S_0 = \int \sum_i p_i\,dq_i = \int \sum_{ik} a_{ik}(q)\frac{dq_k}{dt}dq_i$$

$$= \int \left(\sum_{ik} a_{ik}(q)\frac{dq_k}{dt}q_i\right)\sqrt{\frac{2(E-U)}{\sum a_{ik}(q)\,dq_i\,dq_k}}$$

$$= \int \sqrt{2(E-U)\sum_{ik} a_{ik}(q)\,dq_i\,dq_k} \qquad \cdots ⑧$$

となる．

一粒子の場合

もっとも分かりやすい例として，3次元一粒子の場合を考えてみよう．このとき，一般化座標として粒子の軌跡そのもの $l = l(t)$ をとってしまうのがもっとも面白い．このとき，粒子の質量を m として，

$$a_{ik}(q) = m\delta_{ij}, \qquad q_1 = l, \quad q_2 = q_3 = 0$$

となる．⑧に代入して，

$$S_0 = \int_C \sqrt{2m(E-U)}\,dl \qquad (C は粒子のとる軌跡についてとる) \qquad \cdots ⑨$$

となる．

⑨の簡単な例として，$U=0$ のときを考えてみよう．このとき，⑨は

$$S_0 = \sqrt{2mE}\int_C dl \quad \cdots ⑩$$

となる．⑩において S_0 が最小値をとるのは，⑩の軌跡 C が直線のときである．これはごくあたりまえの結果である．

⑨式は，粒子の軌跡が，ただ $\sqrt{2m(E-U)}$ の線積分を最小にするというきわめて単純な原理のみによって決定されるという，とても興味深い結論をもっている．