§46 リウヴィルの定理

位相空間

一般的な力学系において、力学系は s コの一般座標と s コの一般化運動量を座標とする、2s 次元の位相空間によって記述できる。このとき、系の時間発展によって、系を表現するのは"点"であり、これは位相空間に線をえがいていく。

ここで、微分の積

$$d\Gamma = dq_1 \cdots dq_s \, dp_1 \cdots dp_s \quad \cdots ①$$

は、位相空間の"体積空間"とみなすことができる。このとき、正準変換

$$q, p \longrightarrow Q, P$$

$$d\Gamma \longrightarrow d\Gamma' = dQ_1 \cdots dQ_s \, dP_1 \cdots dP_s \quad \cdots ②$$

によって、体積が不変であること

$$\int d\Gamma = \int d\Gamma' \quad \cdots ③$$

を示すことができる。

③の証明

③を示すためには、ヤコビアン

$$D = \left| \frac{\partial(Q_1, \cdots, Q_s, P_1, \cdots, P_s)}{\partial(q_1, \cdots, q_s, p_1, \cdots, p_s)} \right| \quad \cdots ④$$

の値が1に等しいことを示せばよい。そこでまず、ヤコビ行列の有名な性質

$$D = \left| \frac{\dfrac{\partial(Q_1, \cdots, Q_s, P_1, \cdots P_s)}{\partial(q_1, \cdots, q_s, P_1, \cdots P_s)}}{\dfrac{\partial(q_1, \cdots, q_s, p_1, \cdots, p_s)}{\partial(q_1, \cdots, q_s, P_1, \cdots, P_s)}} \right| = \frac{\left| \dfrac{\partial(Q_1, \cdots, Q_s)}{\partial(q_1, \cdots, q_s)} \right|}{\left| \dfrac{\partial(p_1, \cdots, p_s)}{\partial(P_1, \cdots, P_s)} \right|} \quad \cdots ⑤$$

を用いる。

つぎに、正準変換の母関数 $\Phi(q, P, t)$ を用いると、前節の議論により、

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i}, \quad H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \cdots ⑥$$

を用いることができるので、これより、

$$\frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial}{\partial P_j}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial P_j}\right) = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}$$

とかける。これより，⑤の分母と分子の行列は，それぞれ転置の関係にすぎないことが分かる。
以上より，⑤は

$$D = 1 \qquad \cdots ⑦$$

となる。以上より，題意は示された。

リウヴィルの定理

ある力学的な運動方程式が与えられたとき，その方程式にしたがって位相空間内の各点は時間とともに運動していく。ここで，ある時刻 t_0 に位相空間内のある一部分の体積をとりだしたときに，その一部の体積は時間発展しても体積をまったく変えないことが知られている。より直観的にいえば，力学法則をみたす位相空間上の各点は，まるで非圧縮性流体のようにふるまうのである。この事実は，リウヴィルの定理とよばれている。

証明 位相空間上の各点 $(q_1, q_2, \cdots, q_s, p_1, p_2, \cdots, p_s)$ における"流束" $\boldsymbol{j}$ を，

$$\boldsymbol{j} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_s, \dot{p}_1, \dot{p}_2, \cdots, \dot{p}_s) \qquad \cdots ⑧$$

によって定義する。すべての点において，$\boldsymbol{j}$ がわき出しも吸い込みももたないこと，すなわち $\nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$ を示せばよい。このことは，正準方程式によって，容易に示せる。

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{j} &= \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i}\right) = 0
\end{aligned}$$

以上より，$\nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$ となり，題意は示された。 （証明終）

§47　ハミルトン・ヤコビ方程式

これまでの節で，以下の2つの式

$$\frac{\partial S(q,t)}{\partial t} + H(q,p,t) = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i \qquad \cdots ①$$

を導出した．これら2つを合わせることにより，

$$\frac{\partial S(q_1,\cdots,q_s,t)}{\partial t} + H\left(q_1,\cdots,q_s,\frac{\partial S}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial S}{\partial q_s},t\right) = 0 \qquad \cdots ②$$

という一階の偏微分方程式を得ることができる．この方程式は**ハミルトン・ヤコビ方程式**とよばれる．