No. 1

Date

解答

$\boxed{1}$

[A] $F(t)$ を $f(t)$ の原始関数とすると

$$(y e^{F(t)})' = r(t)\, e^{F(t)}$$

これより

$$y e^{F(t)} = \int r(t)\, e^{F(t)}\, dt + c$$

$$\therefore\ y(t) = \underbrace{e^{-F(t)} \int r(t)\, e^{F(t)}\, dt}_{\text{特殊解に相当するところ}} + \underbrace{c e^{-F(t)}}_{\text{斉次式の一般解}}$$

である。

[B]

(1) $y = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ とおくと、代入して

$$(-c_1 - a c_2) \sin t + (c_2 - a c_1) \cos t = \sin t$$

これより、c_1, c_2 を求めて、斉次式の解をつけ加えて

$$y(t) = -\frac{1}{1+a^2}(\cos t + a \sin t) + c e^{at}$$

である。

(※ $\mathbb{C}$ に拡張してやっても解ける。2階の場合はこれには大きなメリットがあるが、一階の場合は特にない)

(2) 与えられた式は

$$\frac{d}{dt}(y e^{-2t}) = 2t$$

と変形できる。これより、積分して

$$\therefore\ y e^{-2t} = \int 2t\, dt + c \qquad (c\text{は定数})$$

$$\therefore\ y = (t^2 + c) e^{2t}$$

である初期条件 $y(1) = 0$ より、$c = -1$ と決まるので、以上より

$$y = (t^2 - 1) e^{2t}$$

である。

(3)　(2)と同じようにして

$$(ye^{-2t})' = 2 \qquad \therefore\ y = \underline{(2t+c)e^{2t}} \quad (c\text{は定数})$$

（別解）特解を求める. まず $y_p = ce^{2t}$ とおいて代入してみるが, うまくいかない.
そこで, $y_p = cte^{2t}$ とおいて再代入してみると, $c=2$ を得る. これより,
斉次式の一般解をつけ加えて, 以上より

$$y = \underline{2te^{2t} + ce^{2t}}$$

となる.

（※ 一階で $f(t)$ が定数で未定係数法で代入してつっかえるのは, $f(t)$ が
指数関数のときのみである.
また, 難しいことは考えずに, ダメだったら次数を上げて t をつけるとおぼえておく.）

(4)　特解を求める. $y_p = c_1e^{2t} + c_2\cos t + c_3\sin t$ とおいて代入すると

$$y_p' - y_p = (2c_1 - c_1)e^{2t} + (c_3 - c_2)\cos t + (-c_2 - c_3)\sin t$$

これより

$$c_1 = 1,\ c_2 = 1,\ c_3 = 1$$

となるので, 一般解は斉次式の解をつけ加えて

$$y = ce^{t} + e^{2t} + \cos t + \sin t$$

である. 以上より, 初期条件より $c=-1$ とわかるので

$$y = \underline{-e^{t} + e^{2t} + \cos t + \sin t}$$

(5)　$y' + \dfrac{y}{t} = e^{t}$ は,

$$\frac{d}{dt}(yt) = e^{t}t \qquad \left(\Leftarrow\ (y\underbrace{e^{\log t}}_{=t})' = e^{t}\underbrace{e^{\log t}}_{=t}\right)$$

と変形できる. これより

$$yt = \int te^{t}dt + c \qquad (c\text{は定数})$$

$$= te^{t} - e^{t} + c$$

$$\therefore\ y = \underline{\left(1 - \frac{1}{t}\right)e^{t} + \frac{c}{t}}$$

(6) 与式より

$$(y e^{-\sin t})' = \frac{1}{2}\sin 2t\, e^{-\sin t}$$

解ける形しか出ない!

$$\therefore\ y e^{-\sin t} = \int \sin t \cos t\, e^{-\sin t}\, dt + c$$

$$= \int x e^{-x}\, dx + c \qquad (x = \sin x \text{ とおいた})$$

$$= -xe^{-x} - e^{-x} + c \qquad (c\text{は定数})$$

これより, 一般解は

$$y = -(1+x)e^{-x}e^{\sin t} + ce^{\sin t}$$

$$= -(1+\sin t) + ce^{\sin t}$$

となる. 初期条件より $c=1$ と決まるので, 以上より

$$y = \underline{-(1+\sin t) + e^{\sin t}}$$

である

これを忘れない!

(7) まずは定数解をさがす. $y=c$ とおくと

$$\frac{dy}{dx} = 2xy(1+y) \quad \to \quad 0 = 2xc(1+c)$$

よって $y=-1$ は解の候補の1つである. しかし, 初期条件 $y(0) = -\frac{1}{2}$ を
みたさないので, 不適.

定数解以外のすべての解は, 変数分離によって求められる. 与式より

$$\frac{1}{y(1+y)}\, dy = 2x\, dx$$

なので, 両辺を積分して

$$\int \frac{1}{y(1+y)}\, dy = \int 2x\, dx + c$$

これより

$$\log\left|\frac{y}{1+y}\right| = e^{x^2} + c \qquad \therefore\ e^{x^2+c} = \left|\frac{y}{1+y}\right|$$

となる. 絶対値記号をはずして

$$\pm e^{c} e^{x^2} = \frac{y}{1+y}$$

$\pm e^{c}$ をあらためて $c \in \mathbb{R}$ とおいて

$$c e^{x^2} = \frac{y}{y+1} \qquad \therefore\ y = \frac{c e^{x^2}}{1 - c e^{x^2}}$$

となる. 初期条件より, $c = -1$ と決まり, 以上より, 求める解は

$$y = \frac{-e^{x^2}}{1+e^{x^2}} = \underline{-1 + \frac{1}{1+e^{x^2}}}$$

である.

(8) $xy' = x + 2y$

($u = y/x$ を想定して) $y = xu(x)$ とおく. すると, 代入して

$$x \frac{du}{dx} = 1 + u. \qquad \cdots ①$$

① は定数解 $y_c = -1$ $\cdots$ ② をもつ. ② 以外のすべての解は変数分離法により求められる. これより, c を定数として

$$\int \frac{1}{1+u} du = \int \frac{1}{x} dx + c \qquad \therefore\ \log\left|\frac{1+u}{x}\right| = c$$

$$\therefore\ \frac{1+u}{x} = \pm e^{c}$$

となる. あらためて $\pm e^{c}$ を $c \in \mathbb{R}$ とおきなおして

$$u = cx - 1 \qquad \therefore\ \underline{y = cx^2 - x} \quad (c\text{は定数}) \cdots ③$$

③ は $c = 0$ のとき, 定数解 ② をちゃんとふくんでいる. よって ③ のみをすべての解としてよい. よって ③ がすべての解である.

(9) 定数解は $y = \pm 1$. 定数解をのぞくすべての解は変数分離によりもとめられる.

$$\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right) dy = \int \cos 2x\, dx + \frac{c'}{2} \quad (c\text{は定数})$$

$$\therefore\ \log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \sin 2x + c'$$

$$\therefore\ \frac{y-1}{y+1} = \pm e^{c'} e^{\sin 2x} = c e^{\sin 2x} \quad (c = \pm e^{c'} \text{と改めておいた})$$

$$\therefore\ y = \frac{1 + c e^{\sin 2x}}{1 - c e^{\sin 2x}} \qquad \cdots ①$$

① は定数解 $y = 1$ を ($c = 0$ のとき) ふくむが, $y = -1$ はふくまない

以上より, すべての解は

$$\underline{y = \frac{1 + c e^{\sin 2x}}{1 - c e^{\sin 2x}},\ -1} \quad (c\text{は定数})$$

である.

(10) $2x+y=u$ とおいて

$$u' = u^2+1$$

定数解 $u=c$ ($c\in\mathbb{R}$) はないので、すべての解は変数分離法によってもとめられる。
これより

$$\tan^{-1}u = x+c$$

$$\therefore\ y = \tan(x+c) - 2x$$

である。

これをとればよい

(11) 特異解は $y=0$. これ以外のすべての解は、ベルヌーイの微分方程式としてとける。
$y=y^3u$ とおくと、$u' = -2y^{-3}y'$ より

$$u'-2u = -2\cos x$$

この一般解は

$$u = \frac{4}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x + ce^{-2t}$$

以上より、y にもどして

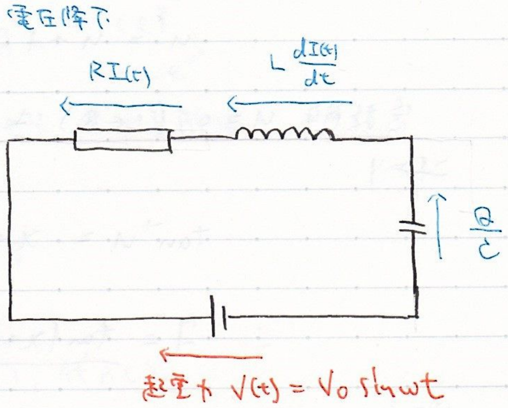
$$y = 0,\ \pm\left(\frac{4}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x + ce^{-2t}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

である。

2

[A]

(1) 右図より



$$RI(t) + L\frac{dI(t)}{dt} + \frac{Q}{C} = V_0 \sin \omega t$$

$$\left(Q(t) = \int I(t)dt + c \right)$$

である。両辺をtで微分して、これより

$$L I''(t) + R I'(t) + \frac{1}{C} I(t) = V_0 \omega \cos \omega t \quad \cdots ①$$

である。

(2) 斉次式は

$$I''(t) + a I'(t) + b I(t) = 0 \qquad \left(a = \frac{R}{L},\ b = \frac{1}{LC} \right)$$

である。これより、一般解は、以下の3通りのように分けられる。

(i) $a^2 - 4b > 0$ のとき、

$$I(t) = C_1 \exp\left(\left(-\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b}\right)t\right) + C_2 \exp\left(\left(-\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2-4b}\right)t\right)$$

$< -\frac{a}{2} + \frac{a}{2} = 0$ $\qquad \longrightarrow 0 \quad (t \to \infty)$

(ii) $a^2 - 4b = 0$ のとき

$$I(t) = (C_1 + tC_2)\exp\left(-\frac{at}{2}\right) \quad \to 0 \quad (t \to \infty)$$

(iii) $a^2 - 4b < 0$ のとき

$$I(t) = e^{-\frac{at}{2}}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}t\right)\right) \to 0 \quad (t \to \infty)$$

(i)〜(iii)より、どの一般解も十分時間が経つと0になってしまう。よって定常状態について考えるときは特解のみ考えればよい。

(3) 複素インピーダンスをZとおくと、$V(t) = V_0 e^{i\omega t}$ として（実際の値は虚部で考えられる）

$I_p(t) = I_0 e^{i(\omega t + \delta)}$

①に代入して

$$\left(-L\omega^2 + iR\omega + \frac{1}{C}\right) I_0 e^{i(\omega t+\delta)} = i\omega V_0 e^{i\omega t}$$

$$\therefore \quad V(t) = \underbrace{\left(i\omega L + R - \frac{i}{\omega C} \right)}_{=Z \text{ とおく}} I_p(t)$$

ここで

$$Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

は複素インピーダンスである。これより、インピーダンスは

$$\left|\frac{V(t)}{I_p(t)}\right| = |Z| = \sqrt{R^2+\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

である。以上より

$$I_p(t) = \left(R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right)^{-1} V(t)$$

$$= \frac{R + i\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\left(V_0 \cos\omega t + iV_0 \sin\omega t\right)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{Im}} I_p(t) = \frac{V_0}{R^2+\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\left(R\sin\omega t - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\cos\omega t\right)$$

である。これが求める答である。

[B]

(1) 特性方程式は $\lambda^2+\lambda+\frac{25}{2}=0$ である。これより $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{7}{2}i$ なので、一般解は

$$y(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(c_1 \cos\frac{7t}{2} + c_2 \sin\frac{7t}{2}\right) \qquad (c_1, c_2 \text{は定数})$$

である。初期条件より

$$\begin{cases} y(0) = c_1 = 1 \\ y'(0) = -\frac{c_1}{2} + \frac{7c_2}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad c_1 = 1,\ c_2 = \frac{1}{7}$$

なので、以上より求める解は

$$y(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{7t}{2} + \frac{1}{7}\sin\frac{7t}{2}\right)$$

である。

(2) 特性方程式は $\lambda^2-2\lambda-3=0$ である。これより、$\lambda = 3, -1$.
$y_p = ce^{-t}$ とおいてもうまくいかないことが予想されるので、$y_p = cte^{-t}$ とおく。
代入して、$c = -1/4$. これより一般解は

$$y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} - \frac{1}{4}te^{-t} \qquad (c_1, c_2 \text{は定数})$$

である。初期条件より

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 3c_1 - c_2 - \frac{1}{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} c_1 = 5/16 \\ c_2 = 11/16 \end{matrix}$$

No.

Date

以上より

$$y(t) = \frac{5}{16}e^{3t} + \frac{11}{16}e^{-t} - \frac{1}{4}te^{-t}$$

(3) 特性方程式は $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, よって $\lambda = 1$ (重解).
これより $y_p = ce^t$ とおいても $y_p = cte^t$ とおいても どちらもうまくいかないことが予想されるので, $y_p = ct^2e^t$ とおく. 代入すると, $c = \frac{1}{2}$ を得る. よって一般解は

$$y(t) = c_1e^t + c_2te^t + \frac{1}{2}t^2e^t \qquad (c_1, c_2 \text{は定数})$$

である. 初期条件より

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 = 1 \\ y'(0) &= c_1 + c_2 = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= -1 \end{aligned}$$

以上より

$$y(t) = e^t - te^t + \frac{1}{2}t^2e^t$$

である.

(4) 複素数に拡張して

$$y'' - 2y' - 3y = e^{(1+i)t}$$

これの特解を求めて, その虚部を求めることにする. $y_p(t) = ce^{(1+i)t}$ とおいて代入して, $c = -\frac{1}{5}$ を得る. これより, 与えられた解の一般解は

$$y(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{3t} - \frac{1}{5}\sin t$$

である. 初期条件より

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -c_1 + 3c_2 - \frac{1}{5} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad c_1 = \frac{7}{10}, \ c_2 = \frac{3}{10}$$

である. 以上より, 求める解は

$$y(t) = \frac{3}{10}e^{3t} + \frac{7}{10}e^{-t} - \frac{1}{5}e^t\sin t$$

である

(5) $\lambda = 1 \pm \sqrt{2}i$ なので, $y_p(t) = ce^{(1+\sqrt{2}i)t}$ とおいてもうまくいかない. よって $y_p(t) = cte^{(1+\sqrt{2}i)t}$ とおく. 代入して, $c = -\frac{\sqrt{2}}{4}i$. これより 一般解は

$$y(t) = e^t\left(c_1\cos\sqrt{2}t + c_2\sin\sqrt{2}t\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}te^t\cos t$$

である.

初期条件より

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_1 + \sqrt{2}c_2 - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 1,\ c_2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

とわかるので、以上より、求める解は

$$y(t) = e^t \cos\sqrt{2}t + \frac{1-2\sqrt{2}}{4} e^t \sin\sqrt{2}t - \frac{\sqrt{2}}{4} t e^t \cos\sqrt{2}t$$

である。

(6) $y_p(t) = c_1 t^2 + c_2 t + c_3$ とおいて代入して、$c_1 = 1,\ c_2 = 1,\ c_3 = \frac{1}{4}$. これより一般解は

$$y(t) = e^{2t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t) + t^2 + t + \frac{1}{4} \quad (c_1, c_2 \text{は定数})$$

である。初期条件より

$$\begin{cases} c_1 + \frac{1}{4} = 1 \\ 2c_1 + 2c_2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{3}{4} \\ c_2 = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

である。以上より

$$y(t) = e^{2t}\left(\frac{3}{4}\cos 2t - \frac{5}{4}\sin 2t\right) + t^2 + t + \frac{1}{4}.$$

(7) $\lambda = 0, -1$ なので特解のとり方を工夫する必要がある。$y_p = c_1 t^2 + c_2 t + c_3$ とおいてもうまくいかないことを予想して $y_p(t) = c_1 t^3 + c_2 t^2 + c_3 t$ とおく。代入して

$$c_1 = \frac{1}{3},\quad c_2 = -1,\quad c_3 = 2.$$

これより一般解は

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 2t \quad (c_1, c_2 \text{は定数}).$$

初期条件より

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ y'(0) = -c_2 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

となるので、以上より求める解は

$$y(t) = -1 + 2e^{-t} + \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 2t$$

である。